Università degli Studi Roma Tre
A.A. 2022/2023
GE110 - Geometria e algebra lineare 1

Tutorato 4
24 marzo 2023
Tutori: Ilaria Cruciani & Valerio Ardizio

Esercizio 1. *Stabilire se i seguenti insiemi di vettori generano l'intero spazio $\mathbb{R}^3$, se sono linearmente dipendenti o indipendenti e se ne costituiscono una base.*
Se sono dipendenti, scrivere uno di questi come combinazione lineare degli altri.
Se possibile, trovare una combinazione lineare che dia come risultato $(1,1,1)$.

1. $v_1 = (1,-1,2), v_2 = (1,-2,1), v_3 = (0,1,0)$
2. $v_1 = (0,5,5), v_2 = (3,2,1), v_3 = (\frac{3}{2},2,\frac{3}{2})$
3. $v_1 = (1,0,1), v_2 = (-1,-2,-2), v_3 = (1,2,1), v_4 = (0,2,2)$
4. $v_1 = (2,3,0), v_2 = (0,1,-2)$

Esercizio 2. *Dati i seguenti vettori:*

$$a = (1,3,2) \quad b = (-2,k-6,k+4) \quad c = (-1,k-3,k^2+k+1) \quad d = (0,-2,k-1)$$

1. *Determinare i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ per cui i vettori $\{a,b,c\}$ sono linearmente indipendenti;*
2. *Posto $k = 2$ determinare le componenti del vettore d rispetto alla base $\{a,b,c\}$.*

Esercizio 3. *Dati i seguenti U, W, trovare le dimensioni di U, W, $U + W$, $U \cap W$ e una base per ognuno di essi:*

1. $U = \langle(1,0,1),(1,-1,2),(1,1,0)\rangle \quad W = \langle(1,1,1),(0,-1,1),(1,2,0)\rangle$;
2. $U = \langle(0,1,1),(0,0,-1),(1,1,-1)\rangle \quad W = \langle(3,0,3),(1,-1,1),(0,3,0)\rangle$;
3. $U = \langle(1,1,0,1),(1,0,1,1),(0,1,-1,0)\rangle \quad W = \langle(2,-1,0,0),(0,0,1,-1),(1,1,1,1)\rangle$;
4. $U = \langle(1,1,0,0),(0,0,1,1),(3,3,-2,-2)\rangle \quad W = \langle(2,4,2,3),(1,2,1,2),(1,2,1,1)\rangle$.

Esercizio 4. *Siano $U = \langle(1,0,\sqrt{5},0),(\sqrt{5},0,-1,0)\rangle$, $W = \langle(0,-2,0,3),(0,1,0,1)\rangle$. Mostrare che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.*

Esercizio 5. *In $\mathbb{R}^5$ si considerino i seguenti insiemi:*

$$W_1 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 : 2x_1 + x_2 = x_3 = 0\}$$

1. *Si verifichi che W_1 è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$. Se ne determini una base e la dimensione;*

2. *Sia* $W_2 = \langle a, b, c, d\rangle$ *dove* $a = (0, 3, 1, -2, 0)$, $b = (0, 0, 2, 1, 1)$, $c = (0, 6, -10, -10, -6)$ *e* $d = (0, 3, 7, 1, 3)$. *Se ne determini una base e la dimensione;*

3. *Dimostrare che* $\mathbb{R}^5 = W_1 \oplus W_2$*;*

4. *Si determini un sottospazio* W_3 *di* $\mathbb{R}^5$ *tale che* $dim(W_1 \cap W_3) = 1$ *e* $dim(W_3) = 3$.

Esercizio 6. *Siano* U, V *due sottospazi vettoriali di* $\mathbb{R}^3$ *di dimensione* 2.

1. *Dimostrare che* $U \cap V \neq 0$*;*

2. *Determinare tutte le possibili intersezioni e descrivere un esempio per ognuna di esse.*

Esercizio 7. *Determinare due sottospazi* U *e* V *di* $\mathbb{R}^4$ *tali che* $\mathbb{R}^4 = U + V$ *, senza che la somma sia diretta.*

Esercizio 8. *Dimostrare o trovare un controesempio per la seguente affermazione.*
Se V *è uno spazio vettoriale e* $v_1, v_2, v_3 \in V$ *sono tali che:*

1. $v_1 \neq 0$

2. $v_2 \notin \langle v_1\rangle$

3. $v_3 \notin \langle v_1, v_2\rangle$

allora v_1, v_2, v_3 *sono linearmente indipendenti.*

Esercizio 9. *Determinare le coordinate del vettore* $c = (2, 1)$ *rispetto alla base* $\mathcal{B}_1 = \{u_1, u_2\}$, *dove* $u_1 = (3, 2)$ *e* $u_2 = (2, 3)$.
Determinare le coordinate del polinomio $p(x) = 2 + x$ *nello spazio vettoriale* $R[x]_{\leq 1}$ *dei polinomi a coefficienti reali e grado al più 1 rispetto alla base* $\mathcal{B}_2 = \{q_1(x), q_2(x)\}$, *dove* $q_1(x) = 3 + 2x$ *e* $q_2(x) = 2 + 3x$.