Università degli Studi Roma Tre
A.A. 2022/2023
GE110 - Geometria e algebra lineare 1

Tutorato 5
31 marzo 2023
Tutori: Ilaria Cruciani & Valerio Ardizio

Esercizio 1. *Sia W_1 il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $a = (1,1,-1)$ e $b = (2,-1,1)$. Sia W_2 il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $c = (1,2,-2)$ e $d = (-1,-1,2)$. Si determini $W_1 \cap W_2$ e una sua base.*

Esercizio 2. *Siano dati in $\mathbb{R}^4$ i seguenti sottospazi vettoriali:*

$$H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y = 2t = 0\}$$

$$K = <(1,2,0,1),(2,4,-1,1),(0,0,1,1),(1,2,4,5),(1,-1,0,5)>$$

1. *Determinare la dimensione ed una base per H e K;*
2. *Determinare la dimensione ed una base per $H \cap K$ e $H + K$.*

Esercizio 3. *Calcolare il rango delle seguenti matrici*

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -3 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Esercizio 4. *Dire quali tra i seguenti insiemi di vettori è una base di $\mathbb{R}^4$. Completare ad una base quegli insiemi che non risultano essere una base di $\mathbb{R}^4$*

1. $B_1 = \{(1,0,8,9),(2,3,4,0),(1,7,5,9)\}$
2. $B_2 = \{(1,0,0,1),(2,3,3,2),(0,-1,-1,0)\}$
3. $B_3 = \{(h,0,1,0),(1,3,2,0),(1,0,h,0),(1,3h,2h,0)\} \quad \forall h \in \mathbb{R}$

Esercizio 5. *Siano A e B due matrici quadrate di ordine n a cofficienti in $\mathbb{R}$. Si stabilisca quali delle seguenti affermazioni sono vere:*

1. $r(A+B) \leq \min\{r(A) + r(B)\}$;
2. $r(A) = r = r(B) \implies r(AB) = r \qquad (r < n)$;

3. $r(A) < n \ \wedge \ r(B) < n \implies r(AB) < n$;

Esercizio 6. *Sia $A \in M_5(\mathbb{R})$ tale che $r(A^2) = 2$. Determinare il valore minimo e massimo che può assumere il rango di A.*

Esercizio 7. *Utilizzando il metodo di Kronecker-Rouché-Capelli si determinino le soluzioni dei seguenti sistemi di equazioni lineari, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.*

1. $\begin{cases} x + z = 1 \\ x + 2y + z = 0 \\ x + z = 3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x + ay + z = 0 \\ ax + y + az = 1 \\ 3x + ay - az \end{cases}$

3. $\begin{cases} ay + az = a \\ ax + y + az = 2 \\ ax - ay - az = a \end{cases}$

Esercizio 8. *Si consideri il sottospazio $\mathcal{S}$ delle matrici simmetriche nello spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$.*

1. *Descrivere una base $\mathcal{B}$ di $\mathcal{S}$*

2. *Calcolare le coordinate dei seguenti vettori nella base $\mathcal{B}$ (dove $E_{i,j}$ denota il vettore della base canonica):*

   (a) $E_{1,1}$;

   (b) $E_{1,2} + E_{2,1}$;

   (c) $E_{2,2}$;

3. *Calcolare le coordinate della matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ nella base $\mathcal{B}$*