Università degli Studi Roma Tre
A.A. 2022/2023
GE110 - Geometria e algebra lineare 1

Tutorato 6
14 aprile 2023
Tutori: Ilaria Cruciani & Valerio Ardizio

Esercizio 1. *Calcolare il determinante delle seguenti matrici (al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ quando presente):*

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$
4. $D = \begin{pmatrix} 6 & k & 1 \\ 1 & 2 & k-1 \\ k & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$
5. ${}^tA$
6. $A \cdot B$

Esercizio 2. *Calcolare, utilizzando la matrice dei cofattori, l'inversa delle seguenti matrici:*

1. $A = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 6 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 0 & k-1 & 0 \\ -1 & 0 & k-1 \\ k & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$

Esercizio 3. *Verficare con un esempio che $det(A + B) \neq det(A) + det(B)$.*

Definizione. $A \in O_n(\mathbb{R}) \iff A^tA = {}^tAA = I_n$.
In tal caso A è una matrice ortogonale $n \times n$ a coefficenti in $\mathbb{R}$

Esercizio 4. *Sia $M \in O_n(\mathbb{R})$ (gruppo delle matrici ortogonali $n \times n$ a coefficenti in $\mathbb{R}$).*

1. *Si dimostri che $det(M) = \pm 1$*

2. *Si determini se* $O_n(\mathbb{R})$ *è un sottospazio vettoriale di* $M_n(\mathbb{R})$

Esercizio 5. *Si calcoli determinante e rango delle seguenti matrici:*

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

4. $D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

5. $E = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Esercizio 6. *Determinare se le matrici dell'esercizio precedente sono invertibili e in tal caso calcolare l'inversa.*

Esercizio 7. *Sia* $A \in M_{22}(\mathbb{R})$ *dire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando la scelta*

1. $A + A^t$ *è simmetrica.*

2. *Se* $det(A) = 1$ *allora* $det(2A) = 2$.

3. *Se* $det(A) = 1$ *allora* $det(AB) = det(B)$ *per ogni* $B \in M_{22}$.

Esercizio 8. *Stabilire, al variare del parametro reale* a*, quando le seguenti matrici sono invertibili. Se invertibili, trovare l'inversa, altrimenti calcolarne il rango.*

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & a & 1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$

2. $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & a \\ a & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$

3. $C = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 0 & a & a \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$

Esercizio 9. *Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione* 4 *e sia* $B = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ *una sua base. Determinare la dimensione e una base del sottospazio W di V generato dai vettori* $v_1 = u_4 - u_3 + u_1$, $v_2 = 2u_2 + u_3 - u_4$, $v_3 = 2u_2 + 2u_1 + u_4 - u_3$; *Completare l'insieme dei vettori* $\{v_1, v_2, v_3\}$ *ad una base di* V.

Esercizio 10. *Sia $k \in \mathbb{R}$ un parametro. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ siano U il sottospazio vettoriale delle soluzioni del seguente sistema lineare omogeneo:*

$$\begin{cases} X_1 - X_3 = 0 \\ X_1 - X_2 + X_4 = 0 \end{cases}$$

e sia

$$W_k = \langle (0,1,1,1), (1,1,0,k), (0,-1,-1,k) \rangle.$$

1. *Determinare le dimensioni di U, W_k e scrivere esplicitamente due basi di tali sottospazi*
2. *Determinare le dimensioni di $W_k + U$ e di $W_k \cap U$;*
3. *Determinare se esiste un sottospazio V di $\mathbb{R}^4$ tale che $V \neq \{0\}$, $V \neq \mathbb{R}^4$ e $(W_k \cap U) \oplus V = \mathbb{R}^4$*