Università degli Studi Roma Tre
A.A. 2022/2023
GE110 - Geometria e algebra lineare 1

Tutorato 7
19 aprile 2023
Tutori: Ilaria Cruciani & Valerio Ardizio

Esercizio 1. *Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare*

$$\begin{cases} X_1 - kX_2 + X_3 - X_4 = 2 \\ X_1 + X_2 - X_4 = 0 \\ X_1 + kX_3 + X_4 = 1 \\ X_2 - X_3 + 3kX_4 = 0 \end{cases}$$

Utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss-Jordan determinare i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile, e in tal caso calcolare esplicitamente le soluzioni

Esercizio 2. *Sia $k \in \mathbb{R}$ si considerino le seguenti matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & k & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Determinare i valori di k per i quali A può essere trasformata in B con sole operazioni elementari.*
2. *Per i valori di k individuati sopra, determinare una sequenza di operazioni elementari che trasforma A in B.*

Esercizio 3. *Sia a un numero reale e si consideri la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 8 & a & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Si determinino i valori di a per i quali A è (o no) invertibile e in tal caso si calcoli, con le sole operazioni elementari, l'inversa.*
2. *Sia*

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si determininino i valori di a per i quali esiste una matrice $B \in M_2(\mathbb{R})$ tale che $BA = C$, senza ridurre il problema alla soluzione di un sistema lineare negli elementi di B.

Esercizio 4. *Sia $k \in R$. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ siano U_k il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo*

$$\begin{cases} X_1 - kX_2 + X_3 = 0 \\ kX_1 + X_3 - X_4 = 0 \end{cases}$$

e

$$W_k = \langle (1,-1,0,0),(0,1,0,-1),(0,0,1,1),(1,-k,0,-1) \rangle$$

1. *Determinare le dimensioni di* U_k, W_k *e scrivere esplicitamente due basi di tali sottospazi.*

2. *Determinare le dimensioni* $W_k + U_k$ *e di* $W_k \cap U_k$

3. *Determinare tutti i vettori* $v \in \mathbb{R}^4$ *tali che*

   $$\{(1,-1,0,0),(0,1,0,-1),(1,1,1-k,2k-1),v\}$$

   non sono generatori di $W_k + U_k$.