Università degli Studi Roma Tre
A.A. 2022/2023
GE110 - Geometria e algebra lineare 1

Tutorato 8
28 aprile 2023
Tutori: Ilaria Cruciani & Valerio Ardizio

Esercizio 1. *Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare*

$$\begin{cases} kX_1 - X_2 + 2X_3 = 1 \\ X_1 - 2X_2 - kX_3 = 0 \\ kX_1 - X_2 = 2 \\ X_1 + X_2 + 6X_3 = 2 - k \end{cases}.$$

Determinare i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, calcolare esplicitamente le soluzioni utilizzando la regola di Cramer.

Esercizio 2. *Per ciascun sottospazio di $U \subseteq \mathbb{Q}^4$ dato come insieme di soluzioni di un sistema lineare omogeneo descritto di seguito, si calcoli il suo insieme di soluzioni U in $\mathbb{Q}^4$ in forma parametrica e se ne determini una sua base.*

1. $$\begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 + 2X_4 = 0 \\ X_1 - X_2 - X_4 = 0 \\ -X_1 + X_2 - X_3 = 0 \\ X_2 - X_4 = 0 \\ 2X_1 - 3X_4 = 0 \end{cases} ;$$

2. $$\begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 + 2X_4 = 0 \\ X_1 - X_2 - X_4 = 0 \\ -X_1 + X_2 - X_3 = 0 \end{cases} .$$

Esercizio 3. *Stabilire se i seguenti punti $A, B, C \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ sono allineati e, in caso affermativo, trovare le equazioni cartesiane della retta che li contiene. Quando c'è un parametro, discuterlo.*

1. $A = (1,0),\ B = (2,3),\ C = (3,6)$;
2. $A = (5,4), B = (4,6), C = (2,1)$;
3. $A = (2,1), B = (3,k+1), C = (2+k,2)$.

Definizione. *Tre punti P_0, P_1, P_3 dello spazio affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ si dicono* allineati *se* $\dim \overline{P_0P_1P_2} = 1$.

Esercizio 4. *Stabilire quali delle seguenti terne di punti sono allineati:*

1. $\{(1/2,2),(1/2,100),(1/2,\pi/4)\}$;
2. $\{(1,1),(1,-1),(-1,1)\}$;

3. $\{(5,9),(-6,-2),(1,3)\}$.

Esercizio 5. *Si consideri il seguente sottospazio vettoriale di* $\mathbb{R}^4$

$$W = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 = x_4 = 0\}$$

1. *Determinare le equazioni parametriche di* W*;*
2. *Sia* $\mathbb{A}^4$ *lo spazio affine di* $\mathbb{R}^4$ *su se stesso e sia* $P = (1,1,1,1) \in \mathbb{A}^4$*, determinare equazioni parametriche e cartesiane per* $\mathcal{S}_{P,W}$.

Esercizio 6. *Si consideri il seguente sottospazio vettoriale di* $\mathbb{R}^4$

$$W = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_3 = x_1 + x_2 = 0\}$$

1. *Determinare le equazioni parametriche di* W*;*
2. *Sia* $\mathbb{A}^4$ *lo spazio affine di* $\mathbb{R}^4$ *su se stesso e sia* $P = (1,1,-1,-1) \in \mathbb{A}^4$*. Descrivere esplicitamente i punti di* $\mathcal{S}_{P,W}$ *e determinare equazioni parametriche e cartesiane di* $\mathcal{S}_{P,W}$*;*
3. *Dati* $Q = (0,-1,1,1), R = (0,1,1,-2) \in \mathbb{A}^4$*, stabilire se* $\mathcal{S}_{Q,W} = \mathcal{S}_{R,W}$.