**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE**

**Corso di Laurea in Matematica**

**GE110 - Geometria 1**

**a.a. 2024-2025**

**Prova scritta del 19-6-2025**

**TESTO E SOLUZIONI**

**1.** Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 - kX_2 + X_3 + X_4 = 0 \\ X_1 + kX_3 - X_4 = 0 \\ X_1 + X_2 - X_4 = 0 \\ X_1 + kX_2 - X_3 = 1 \end{cases}.$$

(a) Determinare i valori di $k$ per i quali il sistema è (o no) compatibile.

(b) Per i valori di $k$ per i quali il sistema è compatibile, calcolare esplicitamente le soluzioni.

**SOLUZIONE:**

Applichiamo operazioni elementari alla matrice orlata

$$\begin{pmatrix} 1 & -k & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & k & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & k & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Scambiando $R_1$ con $R_3$ si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & k & -1 & 0 \\ 1 & -k & 1 & 1 & 0 \\ 1 & k & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui con le operazioni $R_2 \to R_2 - R_1, R_3 \to R_3 - R_1, R_4 \to R_4 - R_1$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & k & 0 & 0 \\ 0 & -k-1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & k-1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e con l'operazione $R_3 \to R_3 + R_4$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & k & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & k-1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui, con le operazioni $R_3 \to R_3 - 2R_2, R_4 \to R_4 + (k-1)R_2$ si trova la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2k & 3 & 1 \\ 0 & 0 & k^2-k-1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se $k = 0$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui, scambiando $R_3$ con $R_4$ si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

ed il sistema (o la matrice) è a gradini, pertanto compatibile, con soluzioni

$$X_4 = \frac{1}{3},\ X_3 = -\frac{2}{3},\ X_2 = 0,\ X_1 = \frac{1}{3}.$$

Se $k \neq 0$, con l'operazione $R_4 \to R_4 + \frac{k^2-k-1}{2k} R_3$ si ottiene da $A$ la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2k & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3k^2-k-3}{2k} & \frac{k^2+k-1}{2k} \end{pmatrix}.$$

Se $3k^2-k-3 = 0$, si vede subito che $k^2+k-1 \neq 0$, pertanto sistema iniziale è incompatibile. Se $3k^2-k-3 \neq 0$, il sistema (o la matrice) è a gradini, pertanto compatibile, con soluzioni

$$X_4 = \frac{k^2+k-1}{3k^2-k-3},\ X_3 = \frac{2}{3k^2-k-3},\ X_2 = \frac{2k}{3k^2-k-3},\ X_1 = \frac{k^2-k-1}{3k^2-k-3}.$$

Concludiamo che il sistema iniziale è compatibile se e solo se $k \neq \frac{1 \pm \sqrt{37}}{6}$ ■.

**2.** Sia $k \in \mathbb{R}$. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ e consideriamo i sottospazi vettoriali delle soluzioni del sistemi lineari omogenei

$$U : \begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 = 0 \\ X_2 + X_3 + X_4 = 0 \end{cases},\quad W_k : \begin{cases} X_1 - X_2 + kX_3 = 0 \\ kX_1 + kX_4 = 0 \end{cases}.$$

(a) Si determinino le dimensioni di $U$, $W_k$ e si scriva esplicitamente una base di tali sottospazi.

(b) Si determinino le dimensioni di $W_k + U$ e di $W_k \cap U$.
(c) Si determinino tutti i valori di $k$ (se esistono) per i quali c'è un sottospazio $V$ di $\mathbb{R}^4$ tale che

$$V + U = V \oplus W_k = \mathbb{R}^4.$$

**SOLUZIONE:**

(a) Posto $X_3 = s, X_4 = t$ nel sistema lineare di $U$, si trovano le soluzioni

$$(2s + t, -s - t, s, t) = s(2, -1, 1, 0) + t(1, -1, 0, 1)$$

pertanto una base di $U$ è $\{(2, -1, 1, 0), (1, -1, 0, 1)\}$ e $\dim U = 2$. Per $W_k$ distinguiamo due casi. Se $k = 0$, posto $X_2 = s, X_3 = t, X_4 = u$ nel sistema lineare di $W_0$ si trovano le soluzioni

$$(s, s, t, u) = s(1, 1, 0, 0) + t(0, 0, 1, 0) + u(0, 0, 0, 1)$$

pertanto una base di $W_0$ è $\{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ e $\dim W_0 = 3$.
Se $k \neq 0$, posto $X_3 = s, X_4 = t$ nel sistema lineare di $W_k$, si trovano le soluzioni

$$(-t, -t + ks, s, t) = t(-1, -1, 0, 1) + s(0, k, 1, 0)$$

pertanto una base di $W_k$ è $\{(-1, -1, 0, 1), (0, k, 1, 0)\}$ e $\dim W_k = 2$.
(b) Se $k = 0$, osserviamo che la matrice dei generatori di $U$ e $W_0$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha rango 4, quindi $\dim(U + W_0) = 4$ e, per la formula di Grassmann,

$$\dim(U \cap W_0) = \dim U + \dim(W_0) - \dim(U + W_0) = 1.$$

Se $k \neq 0$, la matrice dei generatori di $U$ e $W_k$ è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & k & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ora $\det(A) = -2k - 2$ mentre il minore $3 \times 3$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Quindi

$$\dim(U + W_k) = \begin{cases} 4 & \text{se } k \neq 0, -1 \\ 3 & \text{se } k = -1 \end{cases}$$

e pertanto, per la formula di Grassmann,

$$\dim(U \cap W_k) = \dim U + \dim(W_k) - \dim(U + W_k) = 4 - \begin{cases} 4 & \text{se } k \neq 0, -1 \\ 3 & \text{se } k = -1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq 0, -1 \\ 1 & \text{se } k = -1 \end{cases} .$$

(c) Supponiamo che $V$ esista. Dalla $V \oplus W_k = \mathbb{R}^4$ deduciamo che

$$\dim V = \begin{cases} 2 & \text{se } k \neq 0 \\ 1 & \text{se } k = 0 \end{cases} .$$

Nel caso $k = 0$ abbiamo $\dim V = 1$, quindi $\dim(U + V) \leq 3 < 4$, quindi un $V$ come in (c) non esiste.
Nel caso $k \neq 0$, se $V$ esiste deve avere dimensione 2. Prendiamo $V = \langle E_3, E_4 \rangle$. Allora la matrice dei generatori di $U$ e $V$ è

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha rango 4, quindi $V + U = \mathbb{R}^4$. Invece la matrice dei generatori di $V$ e $W_k$ è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & k & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 4, quindi $V + W_k = \mathbb{R}^4$. Dato che $V$ e $W_k$ hanno dimensione 2, la formula di Grassmann ci da che $\dim(V \cap W_k) = 4 - \dim(V + W_k) = 0$ e quindi $V \cap W_k = \{0\}$. Dunque $V \oplus W_k = \mathbb{R}^4$.
Ne deduciamo che un $V$ come in (c) esiste se e solo se $k \neq 0$. ■

**3.** Sia $k \in \mathbb{R}$. Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione 4 con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ e sia $F$ un endomorfismo di $V$ tale che $e_1 + e_3 \in N(F), e_2$ è autovettore di $F$ con autovalore 1 e

$$F(e_1 + e_4) = 2e_1 + e_3 + (k+1)e_4, F(e_1 + 2e_4) = 4e_1 + e_2 + 2e_3 + (k+3)e_4.$$

(a) Determinare una matrice di $F$, il polinomio caratteristico e gli autovalori di $F$.
(b) Trovare le dimensioni degli autospazi di $F$; inoltre, scelto un valore di $k$ e individuato un autovalore $\lambda \neq 0$ di $F$ con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di $F$ associato a $\lambda$.
(c) Determinare i valori di $k$ per i quali $F$ è diagonalizzabile.

**SOLUZIONE:**

(a) Sappiamo che $F(e_1 + e_3) = 0, F(e_2) = e_2$. Osserviamo che

$$e = \{e_1 + e_3, e_2, e_1 + e_4, e_4\}$$

è una base dato che

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

e scriviamo la matrice di $F$ nella base $e$. Si vede subito che

$$F(e_1 + e_4) = 2e_1 + e_3 + (k+1)e_4 = (e_1 + e_3) + (e_1 + e_4) + ke_4$$

mentre

$$F(e_4) = F(e_1 + 2e_4) - F(e_1 + e_4) = 2e_1 + e_2 + e_3 + 2e_4 = (e_1 + e_3) + e_2 + (e_1 + e_4) + e_4.$$

Pertanto la matrice di $F$ nella base $e$ è

$$M_e(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k & 1 \end{pmatrix}$$

ed il polinomio caratteristico di $F$ è

$$P_F(T) = \begin{vmatrix} -T & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1-T & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-T & 1 \\ 0 & 0 & k & 1-T \end{vmatrix} = T(T-1)[T^2 - 2T + 1 - k]$$

e gli autovalori di $F$ sono $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ e, se $k \geq 0$, $1 \pm \sqrt{k}$. Osserviamo che

$$1 \pm \sqrt{k} = 0$$

se e solo se scegliamo $-$ e $k=1$, mentre

$$1 \pm \sqrt{k} = 1$$

se e solo se $k=0$. Dunque

**Autovalori di F e loro molteplicità algebrica (m.a.)**

| | |
|---|---|
| $k<0$ | $\lambda_1 = 0$ (m.a. 1), $\lambda_2 = 1$ (m.a. 1) |
| $k=0$ | $\lambda_1 = 0$ (m.a. 1), $\lambda_2 = 1$ (m.a. 3) |
| $k=1$ | $\lambda_1 = 0$ (m.a. 2), $\lambda_2 = 1$ (m.a. 1), $\lambda_3 = 2$ (m.a. 1) |
| $k>0, k \neq 1$ | $\lambda_1 = 0$ (m.a. 1), $\lambda_2 = 1$ (m.a. 1), $\lambda_3 = 1-\sqrt{k}$ (m.a. 1), |
| | $\lambda_4 = 1+\sqrt{k}$ (m.a. 1) |

(b) Le dimensioni degli autospazi di $F$ saranno sempre 1 nei casi in cui la molteplicità algebrica è 1. Se $k=1$ consideriamo $\lambda_1 = 0$ e calcoliamo la base dell'autospazio $V_0(F) = N(F)$. Si ha

$$M_e(F)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = 0$$

se e solo se

$$\begin{cases} z+w=0 \\ y+w=0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $y=z=-w$, da cui gli autovettori di $F$ associati all'autovalore 0 sono tutti del tipo $x(e_1+e_3) - we_2 - w(e_1+e_4) + we_4 = x(e_1+e_3) - w(e_1+e_2)$. Ne segue che una base di $V_0(F)$ è $\{e_1+e_3, e_1+e_2\}$ e $\dim V_0(F) = 2$.

Infine, per $k=0$, calcoliamo la molteplicità geometrica di 1. Si ha

$$A = M_e(F) - 1I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

per cui $\dim V_1(F) = 4 - r(A) = 2$.

(c) Osserviamo da (a) e (b) che la somma delle molteplicità geometriche è 4 se e solo se $k>0$. Se ne conclude che $F$ è diagonalizzabile se e solo se $k>0$. ■

**4.** Sia $k \in \mathbb{R}$. Sia **A** uno spazio affine di dimensione 4 e sia $\{O, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ un riferimento affine con coordinate $X, Y, Z, W$. Sia $T$ il sottospazio di equazione cartesiana

$$T : \begin{cases} X+Y+Z+W=1 \\ Y-Z-W=0 \end{cases}$$

e sia $S_k$ il sottospazio di equazioni parametriche

$$S_k : \begin{cases} X = 1 - 2t \\ Y = 1 + t - ks \\ Z = kt \\ W = s \end{cases}, s, t \in \mathbb{R}.$$

(a) Determinare per quali valori di $k$ esiste un iperpiano $h$ (cioè un sottospazio di dimensione 3) in $\mathbf{A}$ tale che $h$ è parallelo sia a $T$ che a $S_k$.
(b) Determinare (se esistono) i piani $p$ di $\mathbf{A}$ passanti per $Q = Q(1, 0, 1, 1)$ e paralleli sia a $T$ che a $S_k$.
(c) Determinare se esistono rette $r$ di $\mathbf{A}$ tale che $r$ è parallela a $T$ ed è sghemba con $S_k$.

**SOLUZIONE:**

Calcoliamo le giaciture di $T$ e $S_k$.
La giacitura di $T$ è data dalle soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{cases} X + Y + Z + W = 0 \\ Y - Z - W = 0 \end{cases}$$

che, posto $Z = u, W = v$ per $u, v \in \mathbb{R}$, sono

$$(X, Y, Z, W) = (-2u - 2v, u + v, u, v) = u(-2, 1, 1, 0) + v(-2, 1, 0, 1).$$

Pertanto

$$\text{giac}(T) = \langle -2e_1 + e_2 + e_3, -2e_1 + e_2 + e_4 \rangle$$

e $T$ ha dimensione 2.
Dalle equazioni parametriche di $S_k$ deduciamo che

$$\text{giac}(S_k) = \langle -2e_1 + e_2 + ke_3, -ke_2 + e_4 \rangle$$

e $S_k$ è un piano per ogni $k$.
Consideriamo ora la matrice dei generatori delle giaciture di $T$ ed $S_k$:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & k & 0 \\ 0 & -k & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & k & 0 \\ 0 & -k & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2k(1 - k)$$

quindi $r(A) = 4$ se $k \notin \{0, 1\}$. Se $k = 1$ abbiamo

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

e $r(A) = 3$. Se $k = 0$ abbiamo

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

quindi $r(A) = 3$. Ne deduciamo che

$$(*) \quad r(A) = \begin{cases} 4 & \text{se } k \notin \{0, 1\} \\ 3 & \text{se } k \in \{0, 1\} \end{cases} .$$

(a) Supponiamo che esista un iperpiano $h$ in $\mathbf{A}$ tale che $h$ è parallelo sia a $T$ che a $S_k$. Allora, dato che $\dim(\text{giac}(T)) = \dim(\text{giac}(S_k)) = 2, \dim(\text{giac}(h)) = 3$, si ha necessariamente che

$$\text{giac}(T) \subset \text{giac}(h) \text{ e } \text{giac}(S_k) \subset \text{giac}(h).$$

Ne segue che $\text{giac}(T) + \text{giac}(S_k) \subseteq \text{giac}(h)$ e quindi

$$\dim(\text{giac}(T) + \text{giac}(S_k)) \leq \dim(\text{giac}(h)) = 3.$$

Dato che $\dim(\text{giac}(T) + \text{giac}(S_k)) = r(A)$, deduciamo da $(*)$ che $k \in \{0, 1\}$. Viceversa, se $k \in \{0, 1\}$, allora $\dim(\text{giac}(T) + \text{giac}(S_k)) = r(A) = 3$ da $(*)$. Quindi, se $h$ è un qualsiasi iperpiano con $\text{giac}(h) = \text{giac}(T) + \text{giac}(S_k)$, abbiamo che

$$\text{giac}(T) \subset \text{giac}(h) \text{ e } \text{giac}(S_k) \subset \text{giac}(h)$$

ovvero $h$ è parallelo sia a $T$ che a $S_k$.

Dunque $h$ esiste se e solo se $k \in \{0, 1\}$.
(b) Supponiamo che esista un piano $p$ passante per $Q = Q(1, 0, 1, 1)$ e parallelo sia a $T$ che a $S_k$. Allora, avendo la stessa dimensione, avremmo che

$$\operatorname{giac}(T) = \operatorname{giac}(p) = \operatorname{giac}(S_k)$$

e quindi $r(A) = 2$, contraddicendo $(*)$. Pertanto non esistono piani $p$ di $\mathbf{A}$ passanti per $Q = Q(1, 0, 1, 1)$ e paralleli sia a $T$ che a $S_k$.
(c) Per avere una retta parallela a $T$ e non parallela a $S_k$ scegliamo un vettore $v$ tale che $v \in \operatorname{giac}(T)$, ma $v \notin \operatorname{giac}(S_k)$. Per esempio, il vettore $v = e_3 - e_4$ è tale che

$$v = -2e_1 + e_2 + e_3 - (-2e_1 + e_2 + e_4) \in \operatorname{giac}(T)$$

e $v \notin \operatorname{giac}(S_k)$ in quanto la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & k & 0 \\ 0 & -k & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha rango 3, essendo

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & k & 0 \\ -k & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(1 + k^2) \neq 0.$$

Allora ogni retta $r$ di giacitura $\langle v \rangle$ è parallela a $T$ e non è parallela a $S_k$. Per verificare che $r$ è sghemba con $S_k$, scegliamo un punto $Q = Q(a, b, c, d)$ tale che la retta $r$ di giacitura $\langle v \rangle$ e passante per $Q$ non interseca $S_k$. Questa retta ha equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} X = a \\ Y = b \\ Z = c + t \\ W = d - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Ora, eliminando i parametri dalle equazioni parametriche di $S_k$, otteniamo le equazioni cartesiane di $S_k$:

$$\begin{cases} kX + 2Z = k \\ X + 2Y + 2kW = 3 \end{cases}.$$

Allora, un punto di $r \cap S_k$ dovrà soddisfare

$$\begin{cases} ka + 2(c + t) = k \\ a + 2b + 2k(d - t) = 3 \end{cases}$$

che, per esempio, non è soddisfatta se $a = 1, b = c = d = 0$. Quindi la retta $r = S_{Q,\langle v \rangle}$ dove $Q = Q(1, 0, 0, 0)$ è parallela a $T$ ed è sghemba con $S_k$.
Se ne conclude che per ogni $k$ esiste una retta $r$ di $\mathbf{A}$ tale che $r$ è parallela a $T$ ed è sghemba con $S_k$. ■