

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2024-2025

Prova scritta del 19-6-2025

TESTO

1. Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 - kX_2 + X_3 + X_4 = 0 \\ X_1 + kX_3 - X_4 = 0 \\ X_1 + X_2 - X_4 = 0 \\ X_1 + kX_2 - X_3 = 1 \end{cases}.$$

(a) Determinare i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile.

(b) Per i valori di k per i quali il sistema è compatibile, calcolare esplicitamente le soluzioni.

2. Sia $k \in \mathbb{R}$. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ e consideriamo i sottospazi vettoriali delle soluzioni del sistemi lineari omogenei

$$U : \begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 = 0 \\ X_2 + X_3 + X_4 = 0 \end{cases}, \quad W_k : \begin{cases} X_1 - X_2 + kX_3 = 0 \\ kX_1 + kX_4 = 0 \end{cases}.$$

(a) Si determinino le dimensioni di U , W_k e si scriva esplicitamente una base di tali sottospazi.

(b) Si determinino le dimensioni di $W_k + U$ e di $W_k \cap U$.

(c) Si determinino tutti i valori di k (se esistono) per i quali c'è un sottospazio V di $\mathbb{R}^4$ tale che

$$V + U = V \oplus W_k = \mathbb{R}^4.$$

3. Sia $k \in \mathbb{R}$. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ e sia F un endomorfismo di V tale che $e_1 + e_3 \in N(F)$, e_2 è autovettore di F con autovalore 1 e

$$F(e_1 + e_4) = 2e_1 + e_3 + (k+1)e_4, F(e_1 + 2e_4) = 4e_1 + e_2 + 2e_3 + (k+3)e_4.$$

(a) Determinare una matrice di F , il polinomio caratteristico e gli autovalori di F .

(b) Trovare le dimensioni degli autospazi di F ; inoltre, scelto un valore di k e individuato un autovalore $\lambda \neq 0$ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ .

(c) Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.

4. Sia $k \in \mathbb{R}$. Sia $\mathbf{A}$ uno spazio affine di dimensione 4 e sia $\{O, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ un riferimento affine con coordinate X, Y, Z, W . Sia T il sottospazio di equazione cartesiana

$$T : \begin{cases} X + Y + Z + W = 1 \\ Y - Z - W = 0 \end{cases}$$

e sia S_k il sottospazio di equazioni parametriche

$$S_k : \begin{cases} X = 1 - 2t \\ Y = 1 + t - ks \\ Z = kt \\ W = s \end{cases}, s, t \in \mathbb{R}.$$

(a) Determinare per quali valori di k esiste un iperpiano h (cioè un sottospazio di dimensione 3) in $\mathbf{A}$ tale che h è parallelo sia a T che a S_k .

(b) Determinare (se esistono) i piani p di $\mathbf{A}$ passanti per $Q = Q(1, 0, 1, 1)$ e paralleli sia a T che a S_k .

(c) Determinare se esistono rette r di $\mathbf{A}$ tale che r è parallela a T ed è sghemba con S_k .