UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2024-2025

Prova scritta del 21-7-2025

TESTO E SOLUZIONI

1. Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} (k-1)X_1 + X_3 + X_4 = -1 \\ X_1 + X_2 - X_4 = -1 \\ X_1 - X_2 + 3X_3 = 0 \\ kX_1 + 3X_2 + 4X_3 + 2X_4 = 0 \end{cases}.$$

(a) Determinare i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile.

(b) Per i valori di k per i quali il sistema è compatibile, calcolare esplicitamente le soluzioni.

SOLUZIONE:

Applichiamo operazioni elementari alla matrice orlata

$$\begin{pmatrix} k-1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ k & 3 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Scambiando R_1 con R_2 si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ k-1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ k & 3 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui con le operazioni $R_2 \to R_2 - (k-1)R_1, R_3 \to R_3 - R_1, R_4 \to R_4 - kR_1$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1-k & 1 & k & k-2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3-k & 4 & 2+k & k \end{pmatrix}$$

e scambiando R_2 con R_3 si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1-k & 1 & k & k-2 \\ 0 & 3-k & 4 & 2+k & k \end{pmatrix}$$

da cui, con le operazioni $R_3 \to R_3 + \frac{1-k}{2}R_2, R_4 \to R_4 + \frac{3-k}{2}R_2$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{5-3k}{2} & \frac{k+1}{2} & \frac{k-3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{17-3k}{2} & \frac{7+k}{2} & \frac{k+3}{2} \end{pmatrix}$$

da cui con le operazioni $R_3 \to R_3 - R_4, R_4 \to 2R_4$ si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 17-3k & 7+k & k+3 \end{pmatrix}$$

da cui con l'operazione $R_3 \to -\frac{1}{3}R_3$ si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 17-3k & 7+k & k+3 \end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_4 \to R_4 - \frac{17-3k}{2}R_3$ da la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5k-3}{2} & \frac{5k-11}{2} \end{pmatrix}.$$

Se $k = \frac{3}{5}$ si ha che il sistema è incompatibile.
Se $k \neq \frac{3}{5}$ il sistema (o la matrice) è a gradini, pertanto compatibile e si trova risolvendo

$$X_4 = \frac{5k-11}{5k-3},\ X_3 = \frac{4}{5k-3},\ X_2 = \frac{2}{5k-3},\ X_1 = -\frac{10}{5k-3}. \blacksquare$$

2. Sia $k \in \mathbb{R}$. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 4 con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ e siano

$$v_1 = e_1 + e_2 + ke_3, v_2 = e_1 + e_2 + e_4, v_3 = (k-1)e_2 - e_3 + e_4, v_4 = e_2 - e_3.$$

(a) Sia $U = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ il sottospazio generato da essi. Calcolare la dimensione di U ed una sua base.
(b) Determinare (se esistono) tutti sottospazi W di V tale che

$$U \oplus W \oplus \langle e_1 \rangle = V.$$

(c) Siano $u = e_1 - e_4, v = e_2 + e_3$. Determinare (se esistono) i valori di k per i quali $\dim(U \cap \langle u, v\rangle) \neq 2$.

SOLUZIONE:

(a) Per calcolare la dimensione ed una base di U, consideriamo la matrice dei suoi generatori

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & k-1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si calcola

$$\det(A) = 2(1-k) \text{ e, per } k = 1, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

Pertanto $\dim(U) = r(A) = \begin{cases} 3 & \text{se } k = 1 \\ 4 & \text{se } k \neq 1 \end{cases}$. Inoltre, sempre da A, deduciamo che una base di U è: $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ se $k \neq 1$ e $\{v_2, v_3, v_4\}$ se $k = 1$.

(b) Se $k \neq 1$ sappiamo da a) che $U = V$, quindi un sottospazio W di V tale che $U \oplus W \oplus \langle e_1\rangle = V$ non esiste. Se $k = 1$ abbiamo che

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

da cui deduciamo che $U \oplus \langle e_1\rangle = V$. Pertanto l'unico sottospazio W di V tale che $U \oplus W \oplus \langle e_1\rangle = V$ è $W = \{0\}$.

(c) Se $k \neq 1$ abbiamo che $U = V$, quindi $\dim(U \cap \langle u, v\rangle) = \dim\langle u, v\rangle = 2$. Se $k = 1$ abbiamo che

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

quindi $\dim(U + \langle u, v\rangle) = 4$ e la formula di Grassmann ci dice che

$$\dim(U \cap \langle u, v\rangle) = 1.$$

Ne concludiamo che $\dim(U \cap \langle u, v\rangle) \neq 2$ se e solo se $k = 1$. ■

3. Siano $v_1 = (1, 0, 1, 0), v_2 = (0, -1, 0, 1) \in \mathbb{R}^4$, sia $U = \langle v_1, v_2\rangle$ e sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che

$$F_{|U} = id_U, F(E_2 + E_3) \in \langle E_3\rangle, F(E_2) = E_2 + E_3 + E_4$$

dove $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

Scelto un opportuno parametro $k \in \mathbb{R}$:

(a) determinare una matrice di F, il polinomio caratteristico e gli autovalori di F;

(b) trovare le dimensioni degli autospazi di F; inoltre, scelto un valore di k e individuato un autovalore $\lambda \neq 0$ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ;

(c) Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.

SOLUZIONE:

(a) Per ipotesi sappiamo che

$$F(v_1) = v_1, F(v_2) = v_2.$$

Inoltre, essendo $F(E_2 + E_3) \in \langle E_3 \rangle$, esisterà un $k \in \mathbb{R}$ tale che

$$F(E_2 + E_3) = kE_3.$$

Osserviamo che $e = \{v_1, v_2, E_2 + E_3, E_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$ in quanto

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Ora abbiamo

$$F(E_3) = F(E_2 + E_3) - F(E_2) = kE_3 - E_2 - E_3 - E_4$$

e $E_4 = v_2 + E_2$, da cui

$$F(E_3) = kE_3 - E_2 - E_3 - v_2 - E_2 = -v_2 - 2(E_2 + E_3) + (k+1)E_3.$$

Quindi la matrice di F nella base e è

$$M_e(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & k & k+1 \end{pmatrix}$$

ed il polinomio caratteristico di F è

$$P_F(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-T & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -T & -2 \\ 0 & 0 & k & k+1-T \end{vmatrix} = (T-1)^2(T^2 - (k+1)T + 2k)$$

e gli autovalori di F sono $\lambda_1 = 1$ e, se $k \leq 3 - 2\sqrt{2}$ o $k \geq 3 + 2\sqrt{2}$, avremo anche $\frac{k+1\pm\sqrt{k^2-6k+1}}{2}$. Notiamo che

$$\frac{k+1\pm\sqrt{k^2-6k+1}}{2} = 1$$

se e solo se scegliamo "+" e $k = 0$.
Ne segue che gli autovalori di F sono

Autovalori di F e loro molteplicità algebrica (m.a.)

$3-2\sqrt{2} < k < 3+2\sqrt{2}$	$\lambda_1 = 1$ (m.a. 2)
$k \neq 0, k < 3-2\sqrt{2}$ o $k > 3+2\sqrt{2}$	$\lambda_1 = 1$ (m.a. 2), $\lambda_2 = \frac{k+1-\sqrt{k^2-6k+1}}{2}$ (m.a. 1), $\lambda_3 = \frac{k+1+\sqrt{k^2-6k+1}}{2}$ (m.a. 1)
$k = 3 \pm 2\sqrt{2}$	$\lambda_1 = 1$ (m.a. 2), $\lambda_2 = \frac{k+1}{2}$(m.a. 2)
$k = 0$	$\lambda_1 = 1$ (m.a. 3), $\lambda_2 = 0$(m.a. 1)

(b) Dato che la molteplicità geometrica è sempre almeno 1 e non può superare la molteplicità algebrica, ne segue che le dimensioni degli autospazi di F saranno 1 in tutti i casi nella tabella sopra nei quali la molteplicità algebrica è 1. Vediamo i casi restanti.
Se $k = 3 \pm 2\sqrt{2}$, posto $T = \frac{k+1}{2}$ nella matrice $M_e(F) - TI_3$ si ottiene

$$r(M_e(F) - \frac{k+1}{2}I_3) = r(\begin{pmatrix} \frac{1-k}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-k}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1+k}{2} & -2 \\ 0 & 0 & k & \frac{k+1}{2} \end{pmatrix}) = 3$$

perché $k = 3 \pm 2\sqrt{2} \neq \pm 1$. Pertanto si ha che da cui $\dim V_{\frac{k+1}{2}}(F) = 4 - 3 = 1$.
Prendiamo $\lambda_1 = 1$ come l'autovalore da considerare nel punto (b), pertanto calcoliamo direttamente la base di $V_1(F)$. Come sappiamo tutti gli autovettori di F con autovalore 1 sono soluzioni del sistema $(M_e(F) - I_3)X = 0$ dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$. Si ottiene

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & k & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = 0$$

ovvero

$$\begin{cases} -w = 0 \\ -z - 2w = 0 \\ kz + kw = 0 \end{cases}$$

che ha soluzioni $z = w = 0$, da cui gli autovettori di F associati all'autovalore 1 sono tutti del tipo $xv_1 + yv_2$. Ne segue che una base di $V_1(F)$ è $\{v_1, v_2\}$ e $\dim V_1(F) = 2$ per ogni k.

(c) Per la diagonalizzabilità di F abbiamo i seguenti casi:

molteplicità geometrica (m.g) e algebrica (m.a.) degli autovalori

1) $3 - 2\sqrt{2} < k < 3 + 2\sqrt{2}$:

autovalore	m.g.	m.a.
1	2	2

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è $2 < 4$ e quindi F non è diagonalizzabile.

2) $k \neq 0, k < 3 - 2\sqrt{2}$ o $k > 3 + 2\sqrt{2}$:

autovalore	m.g.	m.a.
1	2	2
$\frac{k+1-\sqrt{k^2-6k+1}}{2}$	1	1
$\frac{k+1+\sqrt{k^2-6k+1}}{2}$	1	1

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è 4 e quindi F è diagonalizzabile.

3) $k = 3 \pm 2\sqrt{2}$:

autovalore	m.g.	m.a.
1	2	2
$\frac{k+1}{2}$	1	2

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è $3 < 4$ e quindi F non è diagonalizzabile.

4) $k = 0$:

autovalore	m.g.	m.a.
1	2	3
0	1	1

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è $3 < 4$ e quindi F non è diagonalizzabile.

Se ne conclude che F è diagonalizzabile se e solo se $k \neq 0$ e $k < 3 - 2\sqrt{2}$ o $k > 3 + 2\sqrt{2}$. ■

4. Sia $k \in \mathbb{R}$. In uno spazio affine A di dimensione 4 sia O, e_1, e_2, e_3, e_4 un riferimento affine e siano X, Y, Z, W le coordinate. Siano S e T_k i due sottospazi con le seguenti equazioni:

$$S : \begin{cases} X + Y + W = 1 \\ Y + Z + W = 0 \end{cases}, T_k : \begin{cases} X = -1 + v \\ Y = -ku \\ Z = 2 + v \\ W = ku - v \end{cases}, u, v \in \mathbb{R}.$$

(a) Calcolare la dimensione di S e di T_k.

(b) Determinare per quali valori di k esiste un piano $p \subset A$ che sia parallelo a S ed a T_k. Per tali valori di k scrivere le equazioni di tutti i possibili p.

(c) Determinare, per ogni k, le equazioni di una retta in A che sia sghemba con S e con T_k.

SOLUZIONE:

(a) e (b) La matrice del sistema che definisce S è

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha rango 2, da cui, per il teorema di Kronecker-Rouché-Capelli, $S \neq \emptyset$ ed è quindi un sottospazio e

$$\dim S = 4 - 2 = 2.$$

Inoltre la giacitura di S è data dal sistema omogeneo $Bx = 0$, dove $x =^t (X, Y, Z, W)$. Posto $Z = s, W = t$ si ottengono le soluzioni $X = s, Y = -s - t$, quindi un vettore della giacitura di S ha coordinate

$$(s, -s - t, s, t) = s(1, -1, 1, 0) + t(0, -1, 0, 1).$$

Ne deduciamo che

$$\text{giac}(S) = \langle e_1 - e_2 + e_3, -e_2 + e_4 \rangle.$$

Dalle equazioni parametriche di T_k deduciamo subito che T_k è il sottospazio passante per il punto $Q(-1, 0, 2, 0)$ e di giacitura generata da $k(-e_2 + e_4)$ e $e_1 + e_3 - e_4$, da cui abbiamo

$$\text{giac}(T_k) = \begin{cases} \langle -e_2 + e_4, e_1 + e_3 - e_4 \rangle & \text{se } k \neq 0 \\ \langle e_1 + e_3 - e_4 \rangle & \text{se } k = 0 \end{cases}$$

e quindi

$$\dim T_k = \begin{cases} 2 & \text{se } k \neq 0 \\ 1 & \text{se } k = 0 \end{cases}.$$

Osserviamo ora che

$$\text{giac}(T_k) \subseteq \text{giac}(S) \text{ per ogni } k :$$

infatti $-e_2 + e_4 \in \text{giac}(S)$ e $e_1 + e_3 - e_4 = (e_1 - e_2 + e_3) - (-e_2 + e_4) \in \text{giac}(S)$. Dunque S e T_k sono paralleli per ogni k.
Ora, un piano $p \subset A$ è parallelo ad S ed a T_k se e solo se, dato che S è un piano mentre T_k è un piano o una retta,

$$\text{giac}(p) = \text{giac}(S), \text{giac}(T_k) \subseteq \text{giac}(p)$$

se e solo se, essendo S e T_k paralleli.

$$\text{giac}(p) = \text{giac}(S) = \langle e_1 - e_2 + e_3, -e_2 + e_4 \rangle.$$

Quindi tali piani p esistono per ogni k e sono tutti i piani di giacitura $\langle e_1 - e_2 + e_3, -e_2 + e_4 \rangle$ passanti per un qualsiasi punto $Q = Q(a, b, c, d)$ di A. Avranno quindi equazioni parametriche

$$p : \begin{cases} X = a + u \\ Y = b - u - v \\ Z = c + u \\ W = d + v \end{cases}, u, v \in \mathbb{R}.$$

(c) Prendiamo il punto $Q(0, 1, 0, 0) \in A$ e consideriamo la retta r passante per Q di giacitura $\langle e_1 \rangle$, ovvero la retta di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} X = t \\ Y = 1 \\ Z = 0 \\ W = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Chiaramente r non è parallela né ad S né a T_k, dato che $e_1 \notin \text{giac}(S)$: infatti la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango 3. Inoltre, sostituendo nelle equazioni di S le coordinate parametriche dei punti di r, abbiamo il sistema

$$\begin{cases} t + 1 = 1 \\ 1 = 0 \end{cases}$$

che è ovviamente incompatibile e quindi $r \cap S = \emptyset$. Infine, si vede subito, eliminando i parametri, che T_k è contenuto nell'iperpiano h di equazione $Y + Z + W = 2$, che non contiene punti di r in quanto, altrimenti, si avrebbe che $1 + 0 + 0 = 2$. Dunque $r \cap T_k \subset r \cap h = \emptyset$. Concludiamo che r è sghemba con S e con T_k. ∎