UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2024-2025

Prova scritta del 21-7-2025

TESTO

1. Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} (k-1)X_1 + X_3 + X_4 = -1 \\ X_1 + X_2 - X_4 = -1 \\ X_1 - X_2 + 3X_3 = 0 \\ kX_1 + 3X_2 + 4X_3 + 2X_4 = 0 \end{cases}.$$

(a) Determinare i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile.

(b) Per i valori di k per i quali il sistema è compatibile, calcolare esplicitamente le soluzioni.

2. Sia $k \in \mathbb{R}$. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 4 con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ e siano

$$v_1 = e_1 + e_2 + ke_3, v_2 = e_1 + e_2 + e_4, v_3 = (k-1)e_2 - e_3 + e_4, v_4 = e_2 - e_3.$$

(a) Sia $U = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ il sottospazio generato da essi. Calcolare la dimensione di U ed una sua base.

(b) Determinare (se esistono) tutti sottospazi W di V tale che

$$U \oplus W \oplus \langle e_1 \rangle = V.$$

(c) Siano $u = e_1 - e_4, v = e_2 + e_3$. Determinare (se esistono) i valori di k per i quali $\dim(U \cap \langle u, v \rangle) \neq 2$.

3. Siano $v_1 = (1, 0, 1, 0), v_2 = (0, -1, 0, 1) \in \mathbb{R}^4$, sia $U = \langle v_1, v_2 \rangle$ e sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che

$$F_{|U} = id_U, F(E_2 + E_3) \in \langle E_3 \rangle, F(E_2) = E_2 + E_3 + E_4$$

dove $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

Scelto un opportuno parametro $k \in \mathbb{R}$:

(a) determinare una matrice di F, il polinomio caratteristico e gli autovalori di F;

(b) trovare le dimensioni degli autospazi di F; inoltre, scelto un valore di k e individuato un autovalore $\lambda \neq 0$ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ;

(c) Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.

4. Sia $k \in \mathbb{R}$. In uno spazio affine A di dimensione 4 sia O, e_1, e_2, e_3, e_4 un riferimento affine e siano X, Y, Z, W le coordinate. Siano S e T_k i due sottospazi con le seguenti equazioni:

$$S : \begin{cases} X + Y + W = 1 \\ Y + Z + W = 0 \end{cases}, T_k : \begin{cases} X = -1 + v \\ Y = -ku \\ Z = 2 + v \\ W = ku - v \end{cases}, u, v \in \mathbb{R}.$$

(a) Calcolare la dimensione di S e di T_k.

(b) Determinare per quali valori di k esiste un piano $p \subset A$ che sia parallelo a S ed a T_k. Per tali valori di k scrivere le equazioni di tutti i possibili p.

(c) Determinare, per ogni k, le equazioni di una retta in A che sia sghemba con S e con T_k.