GE 110 - TUTORATO 1

ES1

1. $^tA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

2. $B \in M_{2,3}$ e $C \in M_{3,2}$ => non sono sommabili

3. $AC = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$

   $A \in M_{3,3}$, $C \in M_{3,2}$ otteniamo una matrice $D \in M_{3,2}$

4. CA non sono moltiplicabili

5. $(BC) \cdot A$

   BC sono moltiplicabili ma sappiamo che otterremo una matrice $D \in M_{2,2}$ che non si può moltiplicare con $A \in M_{3,3}$

6. $BC = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

   $^t(BC) = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

7. $^tC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2,3}$

   ^tC è moltiplicabile per A e otterremo 2×3

   => (^tCA) non è moltiplicabile con $B \in M_{2,3}$

8. $^tB = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$ AC → calcolata al punto 3.

   osserviamo che $^tB \in M_{3,2}$ e $AC \in M_{3,2}$ => sono sommabili

=> $3 \cdot (^tB) + AC = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 0 \\ -18 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 1 & 2 \\ -21 & -3 \end{pmatrix}$

ES2

1. $A-4C = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$ 2. $B-\frac{1}{2}A+C = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

3. $AC = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ $AC-3B = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

4. ${}^tA - 2C + D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

5. $D\,{}^tD = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 2 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 2 \\ 1 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 3 \end{pmatrix}$

6. $3B-2A-2B+C-D = B-2A+C-D$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i & -1 \\ -2 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-i & -3 \\ -2 & 3+i \end{pmatrix}$$

7. $3X+2A-B-3A-6X = -3X-A-B=0 \iff -3X = A+B$

$A+B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$x_1 = -\frac{4}{3}$, $x_2 = -1$, $x_3 = \frac{1}{3}$, $x_4 = \frac{1}{3}$

8. $4A-4X+6X-3C-4A+B = 2X-3C+B = 0 \iff 2X = 3C-B$

$3C-B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

$x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = \frac{3}{2}$

ES3

$A = a_{ij}$ è simmetrica $\iff a_{ij} = a_{ji}$ $\forall\, 1 \le i,j \le n$

1. A è simmetrica
2. B non è simmetrica perché $a_{23} = -a_{32}$
3. $\exists k \in \mathbb{R}$ t.c. C è simmetrica?

$k^3+5k^2+4k = k^2+2k-8$

$k^3+4k^2+2k+8 = 0$

$k(k^2+2)+4(k^2+2) = (k+4)(k^2+2) = 0 \iff k=-4$

ES4

$A = a_{ij}$ è antisimmetrica $\iff a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall\, 1 \le i, j \le n$

1. A è tale che $a_{ij} = -a_{ij}$ solo se $i \neq j$

si osservi che anche a_{ii} deve essere uguale a $-a_{ii}$

$a_{ii} = -a_{ii} \iff a_{ii} = 0$

quindi le matrici antisimm hanno sempre 0 sulla diagonale

2. B ha solo zeri sulla diagonale ma $b_{13} \neq -b_{31}$

$\Rightarrow$ B non è antisimmetrica

3. $\exists\, k \in \mathbb{R}$ t.c. C è antisimmetrica?

$$\begin{cases} k^2 - 4 = 0 \\ k - 3 = -\dfrac{k}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} k = \pm 2 \\ k = 2 \end{cases}$$

per $k = 2$ si ha che $c_{ij} = -c_{ji} \quad \forall\, 1 \le i, j \le n$
(ovvero è antisimmetrica)

ES5

matrici della forma $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sicuramente funzionano

ES6

matrici della forma $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sicuramente funzionano

ES7

sia A simmetrica 3×3 $\rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & f \\ c & f & e \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2 & ab+bd+cf & ac+bf+ce \\ ba+bd+cf & b^2+d^2+f^2 & bc+df+fe \\ ca+bf+ce & cb+fd+ef & c^2+f^2+e^2 \end{pmatrix}$$

$A^2 = 0 \Rightarrow$ in particolare che $\begin{cases} a^2+b^2+c^2 = 0 \\ b^2+d^2+f^2 = 0 \\ c^2+f^2+e^2 = 0 \end{cases}$

essendo somme di quadrati

si ha $a = b = c = d = e = f = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0$

$A = 0 \Rightarrow A^2 = 0$ banale

ES8 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ è una matrice diagonale

A è una matrice invertibile $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

ES9

${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$

$A = (a_{ij}) \in M_{m,n}$ $B = (b_{ij}) \in M_{m,n}$

$\Rightarrow$ si possono sommare $A+B = (a_{ij} + b_{ij}) \in M_{m,n}$

l'elemento ji-esimo di ${}^t(A+B)$ è l'elemento ij-esimo di $A+B$

inoltre ${}^t(A+B) \in M_{n,m}$

${}^tA = (a_{ji}) \in M_{n,m}$ ${}^tB = (b_{ji}) \in M_{n,m}$

${}^tA + {}^tB = (a_{ji} + b_{ji}) \in M_{n,m}$

$\Rightarrow$ ${}^t(A+B)$ e ${}^tA + {}^tB$ hanno lo stesso numero di righe e di colonne

inoltre l'elemento ji-esimo di ${}^tA$ è l'elemento ij-esimo di A

e l'elemento ji-esimo di ${}^tB$ è l'elemento ij-esimo di B

$\Rightarrow$ elemento ji-esimo di ${}^t(A+B) = a_{ij} + b_{ij}$

elemento ji-esimo di ${}^tA + {}^tB = a_{ij} + b_{ij}$

quindi le matrici hanno le stesse entrate

$\Rightarrow$ sono uguali