1)

1. $H_1 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$

Siano $v := (x_1, x_2, 0) \in H_1$ e $w := (\cancel{x_1, x_2}\ y_1, y_2, 0) \in H_1$.
Allora:

$$v + w = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, 0) \in H_1$$

Inoltre:

$$c \cdot v = c \cdot (x_1, x_2, 0) = (c x_1, c x_2, 0) \in H_1, \text{ dove } c \in \mathbb{R}$$

H_1 è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$

2. $H_2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 \geq 0\}$

Se $(x_1, x_2, x_3) \in H_2$ e $c = -1$ si ha:

$$-(x_1, x_2, x_3) = (-x_1, -x_2, -x_3), \text{ con } x_3 \geq 0$$

Allora H_2 non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$

3. $H_3 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 x_2 = 0\}$

Siano $(x_1, x_2, x_3) \in H_3$ e $(y_1, y_2, y_3) \in H_3$, allora $x_1 x_2 = 0 = y_1 y_2$.

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

Se $x_1 = 1$ e $x_2 = 0$ ma $y_1 = 0$ e $y_2 = 1$ si trova

$$(x_1 + y_1)(x_2 + y_2) = 1 \neq 0$$

H_3 non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$

4. $H_4 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = x_2 = 0\}$

Siano $v := (x_1, x_2, x_3) \in H_4$ e $w := (y_1, y_2, y_3) \in H_4$, allora $x_2 = y_2 = 0$.

$$v + w = (x_1 + y_1, 0, x_3 + y_3)$$

che soddisfa $(x_1 + y_1) + (x_3 + y_3) = 0$, quindi $v + w \in H_4$
Se $c \in \mathbb{R}$:

$$c \cdot v = (c x_1, c \cdot \overset{=0}{x_2}, c \cdot x_3) = (c \cdot x_1, 0, c \cdot x_3)$$

che soddisfa $c \cdot (x_1 + x_3) = c$, quindi $c \cdot v \in H_4$

H_4 è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$

5. $H_5 := \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Q} \}$

Se $(x_1, x_2, x_3) \in H_5$ e $c \in \mathbb{R}$, $c \cdot (x_1, x_2, x_3)$ non garantisce componenti razionali.

Basta prendere $c = \sqrt{2}$.

H_5 non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$

6. $H_6 := \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2 - x_3^2 = 0 \}$

Siano $v, w \in H_6$, allora $x_2 = x_3^2$ e $y_2 = y_3^2$.

$$v + w = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

$(x_2 + y_2) = (x_3 + y_3)^2$ sempre?

No, basta prendere $x_2 = 4, x_3 = 2, y_2 = 4, y_3 = -2$.

H_6 non è uno sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$

7. $H_7 := \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = x_3 - 1 = 0 \}$

La condizione $x_3 - 1 = 0 \Rightarrow x_3 = 1 \quad \forall v \in \mathbb{R}^3$, quindi la terza componente è fissata a $x_3 = 1$.

Allora la somma di due vettori con $x_3 = 1$ non soddisferà mai $x_3 = 1$.

H_7 non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

2) Ogni polinomio di $\mathbb{R}_4(x)$ può essere scritto come:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$$

dove $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$.

Proviamo che $\mathbb{R}_4(x)$ è uno spazio vettoriale:

SV 0) Vedere pagina succ...

SV 1) Se $p(x), q(x) \in \mathbb{R}_4$ si ha:

$$(p+q)(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + (a_3 + b_3)x^3 + (a_4 + b_4)x^4$$

Cioè $(p(x) + q(x)) \in \mathbb{R}_4(x)$

SV 2) L'elemento neutro di $\mathbb{R}_4(x)$ per l'addizione è il polinomio nullo $p(x) = 0$, che ha grado ≤ 4, quindi è in $\mathbb{R}_4(x)$.

SV 3) $\forall p(x) \in \mathbb{R}_4(x)$ $\exists -p(x) \in \mathbb{R}_4$ t.c. $p(x) + (-p(x)) = 0$, dove:

$$-p(x) = -a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - a_3 x^3 - a_4 x^4$$

SV 4) $\forall$ $p(x), q(x), r(x) \in \mathbb{R}_4(x)$ si ha:

$$(p(x) + q(x)) + r(x) = p(x) + (q(x) + r(x))$$

SV 5) $\forall$ $p(x), q(x) \in \mathbb{R}_4(x)$ si ha $p(x) + q(x) = q(x) + p(x)$

SV 6) $\forall c \in \mathbb{R}$ e $\forall p(x), q(x) \in \mathbb{R}_4(x)$ si ha:

$$c \cdot (p(x) + q(x)) = c \cdot p(x) + c \cdot q(x)$$

sv7) $\forall c, d \in \mathbb{R}$ e $p(x) \in \mathbb{R}_4(x)$ si ha:

$$(c+d)\,p(x) = c\,p(x) + d\,p(x)$$

sv8) $\forall c, d \in \mathbb{R}$ e $p(x) \in \mathbb{R}_4(x)$ si ha:

$$c \cdot (d\,p(x)) = (c \cdot d)\,p(x)$$

Tutto dovuto alle proprietà dei numeri reali

sv9) L'elemento neutro per la moltiplicazione per scalari è $1 \in \mathbb{R}$, cioè:

$$1 \cdot p(x) = p(x), \text{ dove } p(x) \in \mathbb{R}_4(x)$$

sv0) Vediamo la chiusura rispetto alla moltiplicazione per uno scalare; se $p(x) \in \mathbb{R}_4(x)$ e $c \in \mathbb{R}$, allora:

$$(c \cdot p)(x) = ca_0 + ca_1x + ca_2x^2 + ca_3x^3 + ca_4x^4$$

Ovvero $c \cdot p(x) \in \mathbb{R}_4(x)$

$\mathbb{R}_4(x)$ è allora uno spazio vettoriale

Chiamo ora H l'insieme dei polinomi di grado esattamente 4.
Sia $p(x), q(x) \in H$, allora:

$$p(x) + q(x) \in H\ ?$$

Prendo per esempio $p(x) = 1 + x^4$ e $q(x) = 1 - x^4$ si ha:

$$p(x) + q(x) = 2$$

Ma allora $p(x) + q(x) \notin H$ e questo basta per far vedere che H non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_4(x)$.

3)

i) $H_1 = \{ f \in F : f(3) = 0 \}$

- Considero $f, g \in H_1$, cioè $f(3) = 0$ e $g(3) = 0$.

Si ha:

$$(f+g)(3) = f(3) + g(3) = 0 + 0 = 0$$

cioè $(f+g) \in H_1$

- Sia $f \in H_1$ e $c \in \mathbb{R}$, allora:

$$(c \cdot f)(3) = c \cdot f(3) = c \cdot 0 = 0$$

cioè $(c \cdot f) \in H_1$ $\qquad$ H_1 è un sottospazio di F

ii) $H_2 := \{ g \in F : g(2) = g(4) \}$

- Sia $g_1, g_2 \in H_2$, si ha:

$$(g_1 + g_2)(2) = g_1(2) + g_2(2) = g_1(4) + g_2(4) = (g_1 + g_2)(4)$$

Quindi $(g_1 + g_2) \in H_2$

- Sia $g \in H_2$ e $c \in \mathbb{R}$ $\rightarrow$ $(c \cdot g)(2) = c \cdot g(2) = c \cdot g(4) = (c \cdot g)(4)$

Allora $(c \cdot g) \in H_2$ e H_2 è un sottospazio di $\mathcal{F}$.

iii) $H_3 := \{ h \in \mathcal{F} : h(7) = 1 + h(0) \}$

- Sia $h_1, h_2 \in H_3$

$$(h_1 + h_2)(7) = h_1(7) + h_2(7) = (1 + h_1(0)) + (1 + h_2(0)) =$$

$$= 2 + h_1(0) + h_2(0) = 2 + (h_1 + h_2)(0) \neq 1 + (h_1 + h_2)(0)$$

Allora H_3 non è chiuso rispetto all'addizione e non è allora un sottospazio di $\mathcal{F}$.

4) L'insieme $\mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ contiene tutte le matrici della forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad , \; a_{ij} \in \mathbb{K}$$

verifichiamo gli assiomi di spazio vettoriale:

SV 1) $\forall A, B, C \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ si ha $(A+B)+C = A+(B+C)$

in particolare si ragiona per componenti, la somma su un campo $\mathbb{K}$ è associativa

SV 2) $\forall A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \ \exists \ 0 \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ t.c. $A + 0 = A$

matrice nulla

SV 3) $\forall A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \ \exists -A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, dove:

$$-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}$$

Allora si ha:

$$A + (-A) = \begin{pmatrix} a_{11} - a_{11} & \cdots & a_{1n} - a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} - a_{m1} & \cdots & a_{mn} - a_{mn} \end{pmatrix} = 0$$

SV 4) $\forall A, B \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ si ha $A + B = B + A$ visto che:

$$a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$$

Segue cioè dalla commutatività in $\mathbb{K}$.

SV 5) $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ si ha $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$, con $A, B \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Ciò segue dalla proprietà distributiva negli elementi di $\mathbb{K}$

SV 6) $\forall A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ si ha $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$
Stessa argomentazione del precedente

SV 7) $\forall A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ si ha $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta) A$
Segue dall'associatività della moltiplicazione in $\mathbb{K}$

SV 8) $\forall A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ si ha $1 \cdot A = A$, dove 1 è l'elemento neutro del campo $\mathbb{K}$ per la moltiplicazione scalare

$$1 \cdot a_{ij} = a_{ij} \quad \rightarrow 1 \cdot A = A$$

Allora l'insieme $\mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ è uno spazio vettoriale.

5)
$$S := \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x-2z=0,\ y+w=0\}$$
$$T := \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+z=0,\ 3y-2w=0\}$$

Vogliamo determinare $S \cap T$.

$$\begin{cases} x-2z=0 \\ y+w=0 \\ x+z=0 \\ 3y-2w=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x=2z \\ y+w=0 \\ 3z=0 \\ 3y=2w \end{cases} \longrightarrow z=0,\ x=0,\ w=0,\ y=0$$

Allora $S \cap T = \{(0,0,0,0) \in \mathbb{R}^4\}$

Vogliamo ora $S+T$:

$$S = \left(x, y, \frac{x}{2}, -y\right), \quad T = \left(x', y', -x', \frac{3}{2}y'\right)$$

Allora $S+T = \left(x+x', y+y', \frac{x}{2}-x', -y+\frac{3}{2}y'\right)$

6) $v_1 = (1,0,1,0)$, $v_2 = (0,1,-1,0)$, $v_3 = (0,-1,\lambda,1)$

Dove $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^4$ e $\lambda \in \mathbb{R}$

Se vogliamo determinare $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c. v_1, v_2, v_3 siano linearmente indipendenti possiamo procedere verificando quando l'unica soluzione di:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0$$

è la soluzione banale $c_1 = c_2 = c_3 = 0$

Dobbiamo risolvere:

$$c_1(1,0,1,0)+c_2(0,1,-1,0)+c_3(0,-1,\lambda,1)=(0,0,0,0)$$

Scrivendo esplicitamente per ogni componente si ha:

$$\begin{cases} c_1=0 \\ c_2=c_3 \\ c_3(\lambda-1)=0 \\ c_3=0 \end{cases}$$

Allora v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

7)

$$v_1 = (1,1,1) \quad , v_2 = (0,2,3) \quad \in \mathbb{R}^3$$

i) v_1, v_2 linearmente indipendenti se:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 = 0 \iff c_1 = c_2 = 0$$

Ragiono come prima:

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1 + 2c_2 = 0 \\ c_1 + 3c_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow c_1 = c_2 = 0$$

ii) Sia $v_3 = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, vogliamo:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0 \iff c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

$$\begin{cases} c_1 + c_3 a = 0 \\ c_1 + 2c_2 + c_3 b = 0 \\ c_1 + 3c_2 + c_3 \cdot c = 0 \end{cases} \xrightarrow{c_1 = -c_3 a} \begin{cases} c_1 = -c_3 a \\ 2c_2 + c_3 b = c_3 a \\ 3c_2 + c_3 \cdot c = c_3 a \end{cases}$$

Sottraendo la seconda equazione dalla terza si ottiene:

$$(3c_2 + c_3 \cdot c) - (2c_2 + c_3 \cdot b) = 0$$

Cioè:

$$c_2 + c_3(c - b) = 0$$

Se scegliamo $(c-b) \neq 0$, allora l'unica soluzione è $c_2 = c_3 = 0$, il che implica anche $c_1 = 0$, garantendo l'indipendenza lineare.

Vogliamo allora $v_3 = (a, b, c)$ con $c \neq b$, ad esempio:

$$v_3 = (1, 0, \overset{2}{\cancel{7}}) \quad \text{oppure} \quad v_3 = (1, 0, 1)$$

$\uparrow$ uso questo in iii)

iii) Dati

$$e_1 = (1,0,0), \ e_2 = (0,1,0), \ e_3 = (0,0,1) \in \mathbb{R}^3$$

Vogliamo scrivere ~~v_1, v_2, v_3~~ e_1, e_2, e_3 come combinazioni lineari di ~~e_1, e_2, e_3~~ v_1, v_2, v_3.

Dobbiamo trovare $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ t.c.:

$$e_i = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 \quad , \ i = 1,2,3$$

Risolvo per $e_1 = (1,0,0)$:

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 1 \\ \alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha + 3\beta + \gamma = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \gamma = 1 + 2\beta \\ \alpha = -2\beta \\ \cancel{-2\beta} + 3\beta + 1 + \cancel{2\beta} = 0 \end{cases} \longrightarrow \beta = -\frac{1}{3}$$

Si trova allora $\alpha = \frac{2}{3}$, $\beta = -\frac{1}{3}$, $\gamma = \frac{1}{3}$

Quindi:

$$e_1 = \frac{2}{3} v_1 - \frac{1}{3} v_2 + \frac{1}{3} v_3$$

Si ragiona in modo analogo per e_2, e_3.

3)

1. Risolvendo il sistema di due equazioni in cinque variabili

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Troviamo:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} t_1 \\ x_2 = -\frac{1}{2} t_1 \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = t_2 \\ x_5 = t_3 \end{cases} , \quad t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$$

Ovvero:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = t_1 \overset{=: v_1}{\begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} + t_2 \overset{=: v_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} + t_3 \overset{=: v_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Dunque:

$$W_1 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$

2. Vogliamo risolvere un unica equazione in quattro variabili

$$x_1 + 2x_3 = 0$$

La soluzione è:

$$\begin{cases} x_1 = -2t_2 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = t_2 \\ x_4 = t_3 \end{cases} , \quad t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$$

Ovvero:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t_1 \overset{=: w_1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} + t_2 \overset{=: w_2}{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} + t_3 \overset{=: w_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Dunque:

$$W_2 = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$$

3. Si ha il seguente sistema:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione è:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Pertanto lo spazio vettoriale W_3 si riduce al solo vettore nullo.

9) 1. $\begin{cases} kx_1 - 2x_2 = k+1 \\ x_1 + (k+3)x_2 = 0 \\ (k-1)x_1 - (k+5)x_2 = k+1 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} k & -2 & k+1 \\ 1 & k+3 & 0 \\ k-1 & -k-5 & k+1 \end{pmatrix} \quad R_1 \longleftrightarrow R_2 \begin{pmatrix} 1 & k+3 & 0 \\ k & -2 & k+1 \\ k-1 & -k-5 & k+1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_2 \longmapsto -R_2 \\ R_3 \longmapsto -R_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & k+3 & 0 \\ -k & 2 & -k-1 \\ 1-k & k+5 & -k-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_2 \longmapsto R_2 + kR_1 \\ R_3 \longmapsto R_3 + (k-1)R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & k+3 & 0 \\ 0 & (k+1)(k+2) & -k-1 \\ 0 & (k+1)(k+2) & -k-1 \end{pmatrix}$$

La riduzione fatta ha senso $\forall k \in \mathbb{R}$. Se $k=0$ si ha $R_2 \longmapsto R_2$ e la stessa cosa vale per $k=1$.

$$R_3 \longmapsto R_3 - R_2 \begin{pmatrix} 1 & k+3 & 0 \\ 0 & (k+1)(k+2) & -k-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per $k \neq -1, -2$ la soluzione è:

$\begin{cases} x_1 = \dfrac{k+3}{k+2} \\ x_2 = -\dfrac{1}{k+2} \end{cases}$ Dove $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\}$

Per $k = -2$ il sistema non ha soluzioni

Per $k = -1$ si ha: Sia $x_2 = t$, $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il sistema ha ∞^1 soluzioni:

$\begin{cases} x_1 = -2t \\ x_2 = t \end{cases}$

2.

$$\begin{cases} x_1 + k x_2 + 2 x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 3 x_3 = 2 \\ 2 x_1 + k x_2 + x_3 = 1 \\ 3 x_1 + 2k x_2 + 3 x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & k & 1 & 1 \\ 3 & 2k & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad R_2 \longleftrightarrow R_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & k & 2 & 1 \\ 2 & k & 1 & 1 \\ 3 & 2k & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_2 \longmapsto R_2 - R_1 \\ R_3 \longmapsto R_3 - 2R_1 \\ R_4 \longmapsto R_4 - 3R_1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & k-1 & -1 & -1 \\ 0 & k-2 & -5 & -3 \\ 0 & 2k-3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$R_3 \longmapsto R_3 + R_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & k-1 & -1 & -1 \\ 0 & 2k-3 & -6 & -4 \\ 0 & 2k-3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$R_4 \longmapsto R_4 - R_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & k-1 & -1 & -1 \\ 0 & 2k-3 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_2 \longmapsto 6R_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 6k-6 & -6 & -6 \\ 0 & 2k-3 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_3 \longmapsto R_3 - R_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 6k-6 & -6 & -6 \\ 0 & -4k+3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ci siamo ricondotti al seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 6(k-1)x_2 - 6x_3 = -6 \\ (-4k+3)x_2 = 2 \end{cases}$$

Per $k \neq \frac{3}{4}$ il sistema ammette una sola soluzione:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2k-1}{4k-3} \\ x_2 = -\frac{2}{4k-3} \\ x_3 = \frac{2k-1}{4k-3} \end{cases}$$

Dove $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

Per $k = \frac{3}{4}$ non esistono soluzioni