GE 110 - TUTORATO 4

ES1

1. Vediamo per quali (a,b,c) si ha che

$$a\begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\-4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}2a+3b+c=0\\5a+b-4c=0\\2b+2c=0\end{cases}\qquad\begin{cases}b=-c\\a=c\\2c-3c+c=0 \Rightarrow 0=0\end{cases}$$

tutti i vettori della forma $(c,-c,c)$ sono soluzione

$\Rightarrow v_1, v_2, v_3$ sono lin. dipendenti

$\Rightarrow$ non possono essere generatori di $\mathbb{R}^3$

possiamo scrivere v_1 come combinazione lineare di v_2 e v_3 nel seguente modo:

$$\begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}1\\-4\\2\end{pmatrix}$$

2. v_1, v_2, v_3, v_4 sono 4 vettori in $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow$ sono linearmente dipendenti

per vedere se sono un insieme di generatori bisogna capire se ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ si può scrivere come combinazione lineare di v_1, v_2, v_3, v_4

sia $v=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ un generico vettore di $\mathbb{R}^3$

$\exists\,(a,b,c,d)$ t.c. $av_1+bv_2+cv_3+dv_4=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$?

$$\left(\begin{array}{cccc|c}2&0&1&1&x\\-2&8&3&-1&y\\1&-1&0&0&z\end{array}\right)\xrightarrow{R_{13}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&0&0&z\\-2&8&3&-1&y\\2&0&1&1&x\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_{31}(-2)]{R_{21}(2)}\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&0&0&z\\0&6&3&1&y+2z\\0&2&1&1&x-2z\end{array}\right)\xrightarrow{R_{23}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&0&0&z\\0&2&1&1&x-2z\\0&6&3&1&y+2z\end{array}\right)$$

$$R_{32}(-3)\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 2 & 1 & 1 & x-2z \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3x+y+8z \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} -2d = -3x+y+8z \\ 2b+c+d = x-2z \\ a-b = z \end{cases} \rightarrow \text{il sistema ha sempre soluzione} \Rightarrow \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle = \mathbb{R}^3$$

essendo 4 vettori lin. dip. non possono essere una base di $\mathbb{R}^3$

3. $\langle v_1, v_2 \rangle \subset \mathbb{R}^3$ ma sicuramente non genera
sappiamo inoltre che due vettori sono linearmente dipendenti $\iff$ uno multiplo dell'altro
ma $\nexists\, c \in \mathbb{R}$ t.c. $v_1 = c v_2$
$\Rightarrow$ sono linearmente indipendenti

4. vediamo per quali (a,b,c) si ha che

$$a\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} R_{21} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} R_{21}(-2) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 5 & -11 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{32}\left(\tfrac{2}{5}\right) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 5 & -11 \\ 0 & 0 & \frac{17}{5} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \frac{17}{5}c = 0 \\ 5b - 11c = 0 \\ a - b + 5c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} c = 0 \\ b = 0 \\ a = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow v_1, v_2, v_3$ sono lin. indip.

essendo 3 vettori lin. indip. in $\mathbb{R}^3$
sono una base
$\Rightarrow$ sono anche generatori di $\mathbb{R}^3$

ES2

$W_1 \not\subseteq W_2$ perché preso $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \in W_1$ si ha che $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \notin W_2$

infatti:

$W_2 = \{x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$ ma $1-2-1 \neq 0$

$W_2 \not\subseteq W_1$ perché $W_2 = \{x_1 = x_2 + x_3\}$

$\Rightarrow W_2 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$

ma $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \notin W_1$

$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}1 = a-b\\1 = 2a+b\\0 = a-2b\end{cases}$ imp

$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}1 = a-b\\0 = 2a+b\\1 = a-2b\end{cases}$ imp

ES3

$W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$

se sono anche lin. indip. allora sono una base

per quali $(a, b, c) \to av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$?

$$a\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\0\\2\\1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}a+2c=0\\-c=0\\2b=0\\-a+b+2c=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=0\\b=0\\c=0\end{cases} \Rightarrow \text{sono lin. indip.}$$

$\Rightarrow \dim(W) = 3$ e $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base

Si vede facilmente che $e_1 = (1,0,0,0)$ è lin. indip. con $v_1, v_2, v_3 \Rightarrow \{e_1, v_1, v_2, v_3\}$ base di V

ES4

$GL_n(K)$ non è un sottospazio vettoriale di $M_n(K)$ perchè la matrice nulla non è invertibile
(non vale l'assioma dell'esistenza dell'elemento neutro)

ES5

$\{A, B, C, D\}$ è una base di $M_2(\mathbb{R}) \iff$

$a_1 A + a_2 B + a_3 C + a_4 D = O_2 \Rightarrow (a_1, a_2, a_3, a_4) = (0,0,0,0)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} R_{21}(-1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} R_{23} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_3\left(\tfrac{1}{3}\right) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} R_{32}(-1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} R_{43}(-2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

il sistema è a gradini $\Rightarrow a_4 = 0,\ a_3 = 0,\ a_2 = 0,\ a_1 = 0$
$\Rightarrow$ le matrici sono lin. indip.
in particolare sono una base di $M_2(K)$

per scrivere E come combinazione lineare di $\{A, B, C, D\}$ risolviamo $a_1 A + a_2 B + a_3 C + a_4 D = E$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} R_{13} \\ R_2\left(\tfrac{1}{3}\right) \end{matrix} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) R_{31}(-1)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) R_{32}(1) \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) R_{43}(-2)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -7 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} a_4 = -\frac{7}{3} \\ a_3 = \frac{5}{3} \\ a_2 = 1 \\ a_1 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

ES6

$$\begin{pmatrix} 1 & k+3 & k^2-1 \\ 5 & k-1 & k-1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} R_{23} \begin{pmatrix} 1 & k+3 & k^2-1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 5 & k-1 & k-1 \end{pmatrix}$$

$$R_{31}(-5) \begin{pmatrix} 1 & k+3 & k^2-1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -4k-16 & -5k^2+k+4 \end{pmatrix} R_{32}(-2k-8)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & k+3 & k^2-1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5k^2+k+4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ a, b, c sono lin. indipendenti $\Leftrightarrow$ $-5k^2+k+4 \neq 0$

$$-5k^2+k+4=0 \rightarrow k = \frac{-1 \pm \sqrt{1+80}}{-10} \rightarrow k = 1, -\frac{4}{5}$$

a, b, c lin. indip. $\Leftrightarrow k \neq 1, -\frac{4}{5}$

ES7

notiamo che $\nexists\, a \in \mathbb{R}$ t.c. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ lin. indip.

$\Rightarrow \dim(W_1) = 2$

notiamo che $\nexists\, b \in \mathbb{R}$ t.c. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ lin. indip.

$\Rightarrow \dim(W_2) = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R_{31}(-1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} R_{32}\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \dim(W_1 \cap W_2) = 1$$

(colonne - righe non nulle $= 4-3 = 1$)

in $W_1 \cap W_2$ ci sono i vettori v t.c.

$$v = a\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} = c\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a+2b = c+2d \\ 3b = -d \\ a = d \end{cases} \qquad \begin{cases} a = d \\ b = -\frac{1}{3}d \\ c = -\frac{5}{3}d \end{cases}$$

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ v = d\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{d}{3}\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} = -\frac{5}{3}d\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} \text{ t.c. } d \in \mathbb{R} \right\}$$

ES8

Siano V, W sottospazi di $\mathbb{R}^7$ tali che
$\dim(V) = \dim(W) = 4$

sappiamo, grazie alla formula di Grassmann
che $\dim(V) + \dim(W) = \dim(V \cap W) + \dim(V+W)$
sappiamo inoltre che $\dim(V+W) \leq \dim(\mathbb{R}^7) = 7$
$\Rightarrow \dim(V \cap W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V+W)$
$\Rightarrow \dim(V \cap W) \geq 4 + 4 - 7 = 1$
$\Rightarrow$ l'intersezione non è mai banale

9. Sia $U := \{ (x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4 : 2x + y + z = z + u = 0 \}$

i) Determinare una base per U

$\to$

Scriviamo in forma parametrica le equazioni che definiscono il sottospazio U: dalla seconda equazione otteniamo $u = -z$ e dalla prima $y = -2x - z$.

Siano $x := \alpha$ e $z := \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = -2\alpha - \beta \\ z = \beta \\ u = -\beta \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Siano $v_1 := (1, -2, 0, 0)$ e $v_2 := (0, -1, 1, -1)$.

Abbiamo trovato due vettori v_1, v_2 che generano U, inoltre è immediato verificare che sono linearmente indipendenti:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 = 0 \quad ;$$

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ -2c_1 - c_2 = 0 \\ c_2 = 0 \\ -c_2 = 0 \end{cases} \implies c_1 = c_2 = 0$$

Abbiamo allora una base di U $\to \{v_1, v_2\}$

ii) Costruire un sottospazio $V < \mathbb{R}^4$ t.c. $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$

$\to$

La somma di U e V è diretta se e solo se $U \cap V = \{0\}$, in tal caso per Grassmann si ha:

$$\dim U + \dim V = \dim (U \oplus V) = \dim (\mathbb{R}^4) = 4$$

Dal punto precedente si ha $\dim(U) = 2 \longrightarrow \dim V = 4 - 2 = 2$

Poiché la somma è diretta, l'unione di una base di U e di una base di V costituisce una base per lo spazio somma, in questo caso una base per $\mathbb{R}^4$.

Basta quindi cercare due vettori linearmente indipendenti $\{v_1', v_2'\}$ in $\mathbb{R}^4$ tali che l'unione $\{v_1, v_2, v_1', v_2'\}$ sia una base di $\mathbb{R}^4$.

Vogliamo cercare v_1', v_2' in V e v_1, v_2 sono i vettori del punto (i).
Iniziamo ragionando con la base canonica di $\mathbb{R}^4$:

$$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

Dove essi rappresentano un sistema di generatori per $\mathbb{R}^4$, basterà allora verificare l'indipendenza lineare di un insieme $\{v_1, v_2, e_i, e_s\}$ per qualche i, s per trovare una base di $\mathbb{R}^4$.
Una coppia di vettori che soddisfa tale richiesta è $\{e_1, e_3\}$, cioè:

$\{v_1, v_2, e_1, e_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$

e allora $V = \langle e_1, e_3 \rangle$

10. Vogliamo vedere per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ i tre vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \; ; \; v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ t \\ 11 \end{pmatrix} \; ; \; v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Poniamo:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0 \quad , \quad \text{con } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} c_1 + 3c_2 - c_3 = 0 \\ 3c_1 + tc_2 - 4c_3 = 0 \\ 4c_1 + 11c_2 = 0 \end{cases}$$

Dalla terza equazione troviamo $c_1 = -\frac{11}{4} c_2$

$$\begin{cases} -\frac{11}{4} c_2 + 3c_2 - c_3 = 0 \\ -\frac{33}{4} c_2 + tc_2 - 4c_3 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} c_3 = \frac{1}{4} c_2 \\ tc_2 - \left(\frac{33}{4} + 1\right) c_2 = 0 \end{cases}$$

Allora $c_2 \left(t - \frac{37}{4}\right) = 0 \implies c_2 = 0$ per $t \neq \frac{37}{4}$

Se $c_2 = 0$, allora $c_1 = c_3 = 0$ e v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti.

Per $t = \frac{37}{4}$ l'insieme $\{v_1, v_2, v_3\}$ è linearmente dipendente, ciò vuol dire che, per esempio $v_2 = f(v_1, v_3)$.

Prendendo $e_1 = (1,0,0)$ in $\{v_1, v_3, e_1\}$ abbiamo una base di $\mathbb{R}^3$.