

GE 110 - TUTORATO 5

ES4

ricordiamo che il teorema KRC ci dice che il sistema $AX=b$ è compatibile $\Leftrightarrow r(A) = r(A|b)$

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{21}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 2$$

matrice
orlata $\rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{21}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A|b) = 3$$

$\Rightarrow$ il sistema è incompatibile

2. calcoliamo $r(A)$ e $r(A|b)$ applicando l'algoritmo di G-J direttamente sulla matrice orlata

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{31}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{23}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow r(A) = r(A|b) = 3$$

$\Rightarrow$ il sistema è compatibile, troviamo le soluzioni

$$\begin{cases} -2X_3 = 1 \\ -X_2 - X_3 = -2 \\ X_1 + X_2 + X_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_3 = -\frac{1}{2} \\ X_2 = \frac{5}{2} \\ X_1 = -1 \end{cases}$$

soluzione: $\left\{ \left(-1, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2} \right) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

$$3. \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow r(A) = 2 \neq r(A|b) = 3$$

$\Rightarrow$ il sistema è incompatibile

ES7 vediamo che B_1 è una base di V

linear. indep. $\rightarrow a_1 \cdot 1 + a_2(1+x) = 0$
 $(a_1 + a_2) + a_2 x = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases}$

unica soluzione $(a_1, a_2) = (0, 0)$

generatori $\rightarrow$ sia $v \in V$, $v = ax + b$

$\exists a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ t.c. $a_1(1) + a_2(1+x) = ax + b$
 $a_1 + a_2 + a_2 x = ax + b$

$\rightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 = b \\ a_2 = a \end{cases}$

basta prendere $a_1 = b - a$ e $a_2 = a$

ora che abbiamo dimostrato che B_1 è una base possiamo esprimere V_1, V_2, V_3 in funzione di B_1

$V_1 = 1 \Rightarrow a_1(1) + a_2(1+x) = 1 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 0 \end{cases} \quad [V_1]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$V_2 = x \Rightarrow a_1(1) + a_2(1+x) = x \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -1 \\ a_2 = 1 \end{cases} \quad [V_2]_{B_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$V_3 = 3x + 3 \Rightarrow a_1(1) + a_2(1+x) = 3x + 3$
 $\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 3 \end{cases} \quad [V_3]_{B_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

vediamo che B_2 è una base di V

lin. indep. $\rightarrow a_1(1-x) + a_2(2x) = 0$

$$a_1 + (-a_1 + 2a_2)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ -a_1 + 2a_2 = 0 \end{cases}$$

unica soluzione $(a_1, a_2) = (0, 0)$

generatori $\rightarrow \exists a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ t.c. $a_1(1-x) + a_2(2x) = ax + b$

$$a_1 + (-a_1 + 2a_2)x = ax + b$$

basta prendere $a_1 = a$ e $a_2 = \frac{1}{2}(a+b)$

ora che abbiamo dimostrato che B_2 è una base
troviamo le coordinate di v_1, v_2, v_3

$$v_1 = 1 \rightarrow a_1(1-x) + a_2(2x) = a_1 + (-a_1 + 2a_2)x = 1$$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ -a_1 + 2a_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow [v_1]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$v_2 = x \rightarrow a_1(1-x) + a_2(2x) = a_1 + (-a_1 + 2a_2)x = x$$

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ -a_1 + 2a_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow [v_2]_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$v_3 = 3x+3 \rightarrow a_1(1-x) + a_2(2x) = 3x+3$$

$$a_1 + (-a_1 + 2a_2)x = 3x+3 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 3 \\ -a_1 + 2a_2 = 3 \end{cases}$$

$$[v_3]_{B_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ES8

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_{21}(-2) \\ R_{31}(-1)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$r(A) = 3 \Rightarrow A \in GL_3$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

si noti che $R_1 = R_3$

$$\Rightarrow r(B) < 3 \Rightarrow B \notin GL_3$$

$C \in M_{3,6} \Rightarrow C$ non può essere invertibile

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_{21}(-1) \\ R_{41}(-3)}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{23}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_{32}(2) \\ R_{42}(5)}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 11 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3(\frac{1}{3})}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{43}(-11)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow r(D) = 4 \Rightarrow D \in GL_4$$

ES9

$$\dim(U) = \dim(V) = 2$$

$$\textcircled{1} \quad U+V \text{ sottospazio di } \mathbb{R}^3 \Rightarrow \dim(U+V) \leq 3$$

$$\dim(U) + \dim(V) = \dim(U+V) + \dim(U \cap V)$$

$\begin{matrix} \parallel & \parallel & \parallel \\ 2 & 2 & 3 \end{matrix}$

$$\Rightarrow \dim(U \cap V) \geq 2 + 2 - 3 = 1$$

$$\Rightarrow \dim(U \cap V) \neq 0 \Rightarrow U \cap V \neq \{0\}$$

oppure potevamo dire che se per assurdo $U \cap V = \{0\}$

$$\Rightarrow \dim(U \cap V) = 0 \text{ e } \dim(U \oplus V) = 4 > 3 \text{ impossibile}$$

② osserviamo che $0 < \dim(U \cap V) \leq \dim(U) = 2$
 $\Rightarrow \dim(U \cap V) = 1$ o $\dim(U \cap V) = 2$

se $\dim(U \cap V) = 1$ per esempio potremmo avere

$$U = \langle e_1, e_1 + e_2 + e_3 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V = \langle e_3, e_1 + e_2 + e_3 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\text{dove ovviamente } U \cap V = \langle e_1 + e_2 + e_3 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

se $\dim(U \cap V) = 2$ basta prendere $U \cap V = U$, $U \cap V = V$

ES10

Sappiamo che k vettori sono linearmente indipendenti se e solo se applicando G-J non otteniamo righe nulle, ma se non ci sono righe nulle allora il rango è massimo $\Rightarrow r(A) = k$

se il rango è massimo A non ha righe nulle
 $\Rightarrow$ i vettori sono linearmente indipendenti

ES3

① Si possono prendere, ad esempio, le sottomatrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ oppure } \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ oppure } \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che hanno tutte rango 2

② prendiamo la sottomatrice $\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

applicando G-J otteniamo

che il suo rango è uguale a 3

possiamo dedurre che allora $r(A) = 3$

1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_1 \mapsto R_1 - R_4 \\ R_3 \mapsto R_3 - 2R_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & \lambda & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} R_4 \mapsto R_4 - R_2 \\ R_3 \mapsto R_3 - R_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ne segue che $r(A) \leq 3$ in quanto l'ultima matrice ha una riga nulla.

La terza riga è non nulla $\forall \lambda \in \mathbb{R} \rightarrow r(A) = 3$.

$$\text{Def } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & k \\ 1 & k & 2 & 1 \\ k+1 & 0 & k+1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & k \\ 1 & k & 2 & 1 \\ k+1 & 0 & k+1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_2 \leftrightarrow R_1 \\ R_3 \mapsto R_3 - (k+1)R_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & k & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & k \\ 0 & -k^2 - k & -(k+1) & -k \end{pmatrix}$$

$$R_3 \mapsto R_3 + (k^2 + k)R_2 \begin{pmatrix} 1 & k & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & k \\ 0 & 0 & k^2 - 1 & k^3 + k^2 - k \end{pmatrix}$$

Non esistono valori di k t.c. entrambe le entrate nella terza riga vengono annullate $\rightarrow r(B) = 3 \quad \forall k \in \mathbb{R}$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & k & -2 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & k & -2 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \mapsto R_2 - \lambda R_1} \begin{pmatrix} 1 & k & -2 \\ 0 & 1 - \lambda k & 2\lambda \\ 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$R_3 \mapsto R_3 + \frac{1}{1 - \lambda k} R_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & k & -2 \\ 0 & 1 - \lambda k & 2\lambda \\ 0 & 0 & \frac{3\lambda - \lambda^2 k}{1 - \lambda k} \end{pmatrix}$$

$(1 - \lambda k) \neq 0$

Quo' implica che, se $(1 - \lambda k) \neq 0$, si ha:

i) $(3\lambda - \lambda^2 k) \neq 0 \Rightarrow r(C) = 3$, in quanto C ha gli elementi diagonali non nulli.

ii) $(3\lambda - \lambda^2 k) = 0 \Rightarrow r(C) = 2$, in quanto C ha due pivot non nulli.

Se $(1 - \lambda k) = 0$, si avverte che $\lambda k = 1$ implica $\lambda \neq 0$. Allora:

$$\begin{pmatrix} 1 & k & -2 \\ 0 & 1 - \lambda k & 2\lambda \\ 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[\lambda k = 1]{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & k & -2 \\ 0 & -1 & \lambda \\ 0 & 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

Ma allora $r(C) = 3$.

$$D = \begin{pmatrix} 1+k & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2k+2 & 2+k & 1 \\ 0 & -3k+1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_3 \mapsto R_3 - 2R_1 \quad \begin{pmatrix} 1+k & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & k & -1 \\ 0 & -3k+1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_3 \leftrightarrow R_2 \quad \begin{pmatrix} 1+k & 1 & 1 \\ 0 & k & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3k+1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_4 \mapsto R_4 - \left(\frac{-3k+1}{k} \right) R_2 \quad \begin{pmatrix} 1+k & 1 & 1 \\ 0 & k & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{-2k+1}{k} \end{pmatrix}$$

($k \neq 0$)

$$R_4 \mapsto R_4 - \left(\frac{2k-1}{k} \right) R_3 \quad \begin{pmatrix} 1+k & 1 & 1 \\ 0 & k & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Allora $r(D) = 3$ per $k \neq -1, 0$

Per $k=0$ si ha:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad R_3 \mapsto R_3 - 2R_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Da qui si vede che $r(D) = 3$ per $k=0$.

Per $k = -1$ si ha:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Già da qui si vede che

$$r(D) = 2 \quad \text{per } k = -1.$$

$$\text{In conclusione si è trovato } r(D) = \begin{cases} 3 & \text{per } k \neq -1 \\ 2 & \text{per } k = -1 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}$$

ES2

① $r(A) \leq \min \{m, n\}$ VERO

$$r(A) = \dim \langle A^{(1)}, \dots, A^{(m)} \rangle \Rightarrow r(A) \leq m$$

$$r(A) = \dim \langle A_{(1)}, \dots, A_{(n)} \rangle \Rightarrow r(A) \leq n$$
$$\Rightarrow r(A) \leq \min \{m, n\}$$

② $r(A+B) \leq \min \{r(A), r(B)\}$ FALSO

Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 1$
 $r(B) = 2$

$$A+B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A+B) = 2$$

$$2 = r(A+B) \neq \min \{r(A), r(B)\} = 1$$

③ $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$ VERO

$$r(A) = \dim \langle A_{(1)}, \dots, A_{(n)} \rangle$$

$$r(B) = \dim \langle B_{(1)}, \dots, B_{(n)} \rangle$$

$$r(A+B) = \dim \langle (A_{(1)}, \dots, A_{(n)}) + (B_{(1)}, \dots, B_{(n)}) \rangle$$

ma per la Formula di Grassmann sappiamo che la dimensione della somma di due spazi vettoriali è minore o uguale della somma delle dimensioni $\Rightarrow r(A+B) \leq r(A) + r(B)$

5. Cominciamo con l'asserto che $\dim U = 2$ perché i 2 generatori di U non sono uno multiplo dell'altro, e che $\dim V = 1$ in quanto il generatore di V non è il vettore nullo.

Sappiamo che $U + V = \langle u_1, u_2, v \rangle$. Per calcolare la dimensione studiamo la dipendenza tra i tre generatori. Siano $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$, impongono la seguente relazione:

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 v = 0$$

$$\begin{cases} c_1 - c_2 + c_3 = 0 \\ 2c_1 + c_2 + 8c_3 = 0 \\ 3c_1 + c_2 + 11c_3 = 0 \\ 4c_1 + 2c_2 + 16c_3 = 0 \end{cases}$$

Tale sistema ammette come soluzione non banale $(c_1, c_2, c_3) = (3, 2, -1)$

Quo' significa che $3u_1 + 2u_2 - v = 0$, cioè i tre generatori sono linearmente ~~indipendenti~~.

In particolare vediamo che v è sovrabbondante, $v = f(u_1, u_2)$ con $\{u_1, u_2\}$ linearmente indipendenti. Dunque:

$$U + V = \langle u_1, u_2, v \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle = U$$

Quindi $\dim(U + V) = \dim(U) = 2$.

Dalla formula di Grassman si ha $\dim(U \cap V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U + V)$,

cioè:

$$\dim(U \cap V) = 1$$

ES6

vediamo se $r(A) = r(A|b)$

① matrice orlata $\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & k & k+1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ k & 1 & 0 & k+1 \end{pmatrix}$

$$R_{12} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & k & k+1 \\ k & 1 & 0 & k+1 \end{array} \right) R_{31}(-k) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & k & k+1 \\ 0 & 1-k & -k & 1-k \end{array} \right) R_{32}(-1+k)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & k & k+1 \\ 0 & 0 & k^2-2k & k^2-k \end{array} \right) \text{ mi interessa sapere per quali } k$$
$$k^2-2k=0 \quad \text{e} \quad k^2-k=0$$

$$k^2-2k = k(k-2) = 0 \Rightarrow k=0 \vee k=2$$

$$k^2-k = k(k-1) = 0 \Rightarrow k=0 \vee k=1$$

$$\text{allora } r(A|b) = \begin{cases} 3 & \text{per } k \neq 0 \\ 2 & \text{per } k=0 \end{cases}$$

$$\text{mentre } r(A) = \begin{cases} 3 & \text{per } k \neq 0, 2 \\ 2 & \text{per } k=0 \vee k=2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ il sistema è compatibile per $k \neq 2$

$$\text{se } k \neq 0, 2 \quad r(A|b) = r(A) = 3$$

$$\begin{cases} (k^2-2k)x_3 = k^2-k \\ x_2 + kx_3 = k+1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \frac{k-1}{k-2} \\ x_2 = -\frac{2}{k-2} \\ x_1 = \frac{k-1}{k-2} \end{cases}$$

$$\text{per } k=0 \quad r(A|b) = r(A) = 2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1-t \end{cases}$$

$$\text{soluzione } \{ (t, 1, 1-t) \text{ con } t \in \mathbb{R} \}$$

$$\textcircled{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & k \\ 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 2 & 1 & k & | & k+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_{31}(-2)]{R_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & k \\ 0 & 0 & -2 & | & 1-k \\ 0 & -1 & k-2 & | & -k+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & k \\ 0 & -1 & k-2 & | & -k+1 \\ 0 & 0 & -2 & | & 1-k \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = r(A|b) = 3 \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} -2X_3 = 1-k \\ -X_2 + (k-2)X_3 = -k+1 \\ X_1 + X_2 + X_3 = k \end{cases} \quad \begin{cases} X_3 = \frac{k-1}{2} \\ X_2 = \frac{k^2-k}{2} \\ X_1 = \frac{-k^2+2k+1}{2} \end{cases}$$

mi aspettavo un'unica soluzione perché il rango è 3
e il teorema di KRC mi dice che ha ∞^{n-r} soluzioni

$$\textcircled{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & -k \\ k & k-2 & | & -1 \\ 1+k & k & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_{31}(-k-1)]{R_{21}(-k)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & -k \\ 0 & -2 & | & k^2-1 \\ 0 & -1 & | & k^2+k+2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & -k \\ 0 & -1 & | & k^2+k+2 \\ 0 & -2 & | & k^2-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{32}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & -k \\ 0 & -1 & | & k^2+k+2 \\ 0 & 0 & | & -k^2-2k-5 \end{pmatrix}$$

ovviamente $r(A) = 2$

Vediamo per quali k $r(A|b) = 2$

$$-k^2-2k-5 = k^2+2k+5 = 0 \quad \text{ma } \Delta = b^2-4ac = 4-20 < 0$$

$$\Rightarrow r(A|b) = 3 \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

allora il sistema è sempre incompatibile

$$4. \begin{cases} (k+1)x_1 + (k-1)x_2 + x_3 = 0 \\ (2k-1)x_1 + x_2 + (k-1)x_3 = k \end{cases}$$

Chiamo A la matrice dei coefficienti e b il vettore dei termini noti.

$$A = \begin{pmatrix} k+1 & k-1 & 1 \\ 2k-1 & 1 & k-1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} k+1 & k-1 & 1 & 0 \\ 2k-1 & 1 & k-1 & k \end{array} \right) \begin{array}{l} R_1 \mapsto \frac{1}{k+1} R_1 \\ (k \neq -1) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{k-1}{k+1} & \frac{1}{k+1} & 0 \\ 2k-1 & 1 & k-1 & k \end{array} \right) R_2 \mapsto R_2 - (2k-1)R_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{k-1}{k+1} & \frac{1}{k+1} & 0 \\ 0 & \frac{-2k(k-2)}{k+1} & \frac{k(k+2)}{k+1} & k \end{array} \right)$$

Da qui si vede che $r(A) = r(A|b) = 2 \quad \forall k \in \mathbb{R}$, con $k \neq 0, 2$

Si osserva che, per $k = -1$, A presenta ancora rango 2, e lo stesso vale per $A|b$.

Per il Teorema di Rouché-Capelli, il sistema ammette ∞^{n-r} , dove $r = r(A)$ e n numero incognite. In questo caso il sistema è compatibile con infinite soluzioni dipendenti da un parametro.

Le soluzioni sono della forma:

$$k \neq 0, 2, -1 \quad \left(-\frac{t}{k+1} - \frac{(k-1)t}{2(k+1)} + \frac{(k-1)}{2(k-2)}, \frac{t}{2} - \frac{(k+1)}{2(k-2)}, t \right), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\text{Per } k = -1 \quad \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}t, \frac{t}{2}, t \right), \quad t \in \mathbb{R}$$

Per $k=0$ si ha $r(A) = r(A|k) = 1$, quindi per $k \in \mathbb{R}$ si avranno
 ∞^2 soluzioni, in particolare:

$$(A|k) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

cioè $x_1 - x_2 + x_3 = 0$;

Ponendo $x_2 = t$ e $x_3 = s$, con $s, t \in \mathbb{R}$ si trova:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-s \\ t \\ s \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$