

GE 110 - TUTORATO 6

ESA

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = (1 \cdot 4) - (-3 \cdot 7) = 25$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ho deciso di applicare Laplace rispetto alla seconda riga per cui ottengo

$$2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

in entrambi i casi sviluppo rispetto all'ultima riga

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -32 + 3 = -29$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3$$

0 perché due righe sono uguali

$$\Rightarrow \det(B) = 2(-29) - 1(-3) = -55$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

sviluppo rispetto la prima riga

$$\det(C) = (3-1) - (1+4) + 2(-1-12) = -29$$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

sviluppo rispetto la prima riga

$$\det(D) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3} \right) - \left(\frac{1}{3} - 2 \right) = \frac{3}{2}$$

RICORDIAMO CHE :

$$1) \det({}^t A) = \det(A)$$

$$2) \det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

$$\Rightarrow \det({}^t B) = -55$$

$$\Rightarrow \det(C \cdot D) = -29 \cdot \frac{3}{2} = -\frac{87}{2}$$

$$\Rightarrow \det({}^t D \cdot I_n) = \frac{3}{2} \quad \text{perché } \det(I_n) = 1$$

ES2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

le matrici 1×1 e 2×2
hanno determinante non nullo
 $\Rightarrow 2 \leq r(A) \leq 4$
vediamo la 3×3

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1 + 2) = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow 3 \leq r(A) \leq 4$$

per calcolare il determinante di A applico Laplace all'ultima riga

$$-1 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow r(A) < 4$$

allora per quanto detto sopra $r(A) = 3$

ES3

$A \in O_n(\mathbb{R})$ quindi ${}^t A \cdot A = I_n$

Sappiamo che $\det(I_n) = 1 \Rightarrow \det({}^t A \cdot A) = 1$

il det del prodotto è il prodotto dei det $\rightarrow \det({}^t A) \det(A) = 1$

$$\det({}^t A) = \det(A) \rightarrow (\det(A))^2 = 1 \Rightarrow \det(A) = \pm 1$$

ES4

ricordiamo che $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} {}^t(\text{cof}(M))$

i cofattori di una matrice si ottengono calcolando determinanti di sottomatrici, poiché M è a coeff. interi tutti i determinanti saranno elementi di $\mathbb{Z} \Rightarrow {}^t(\text{cof}(M))$ è a coefficienti interi

$$\text{inoltre } \det(M) = \pm 1 \Rightarrow \frac{1}{\det(M)} = \pm 1 \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow M^{-1}$ è a coeff. interi

DIMOSTRAZIONE ALTERNATIVA

$$\det(M) = \pm 1 \neq 0 \Rightarrow M \in GL_n(\mathbb{Z})$$

poiché $GL_n(\mathbb{Z})$ è un gruppo contiene anche M^{-1}
 $\Rightarrow M^{-1} \in GL_n(\mathbb{Z})$

ovvero M^{-1} è una matrice a coefficienti interi

ES5

1. notare che la prima e la quarta riga di A sono uguali:
 $\Rightarrow \det(A) = 0$ e $A \notin GL_n$

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

applica Laplace per
l'ultima riga

$b_{5,3} = b_{3,3} \rightarrow (-1)^{5+3} = (-1)^8 = 1$

$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -(-1-1) = 2 \neq 0$
 $\Rightarrow B \in GL_n$

3. notare che la seconda e la quinta colonna di C sono uguali: $\Rightarrow \det(C) = 0 \Rightarrow C \notin GL_n$

4. $D = \begin{pmatrix} 1 & t & t-1 \\ 0 & 1 & 2t \\ 1 & 1-t & -1 \end{pmatrix}$

applica il teorema di Laplace
alla prima colonna

$\det(D) = \begin{vmatrix} 1 & 2t \\ 1-t & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t & t-1 \\ 1 & 2t \end{vmatrix} = (-1-2t+2t^2) + (2t^2-t+1)$

$\det(D) = 4t^2 - 3t = t(4t-3)$

$\Rightarrow \det(D) \neq 0$ per $t \neq 0$ e $t \neq \frac{3}{4}$

$D \in GL_n \quad \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{3}{4}\}$

5. $E = \begin{pmatrix} 1 & t-3 & -2 \\ 0 & t-1 & t^2-1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

applica il teorema di Laplace
alla prima colonna

$\det(E) = \begin{vmatrix} t-1 & t^2-1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -2t+2+2t^2-2 = 2t(t-1)$

$\Rightarrow \det(E) \neq 0$ per $t \neq 0$ e $t \neq 1$

$E \in GL_n \quad \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

$$6. \quad F = \begin{pmatrix} t & t & 0 & -t \\ 1 & 0 & t^2-t & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ t^3 & t & 0 & -t \end{pmatrix}$$

applico il teorema di Laplace
rispetto la seconda colonna

$$\det(F) = -t \begin{vmatrix} 1 & t^2-t & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ t^3 & 0 & -t \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} t & 0 & -t \\ 1 & t^2-t & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (t^3-t^2) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ t^3 & -t \end{vmatrix} + (t^3-t^2) \begin{vmatrix} t & -t \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (t^3-t^2)(-t-t^3+t+t)$$

$$= (t^3-t^2)(-t^3+t) = t^3(t-1)(-t^2+1)$$

$$\Rightarrow \det(F) \neq 0 \quad \text{per } t \neq 0, 1, -1$$

$$F \in GL_n \quad \forall t \in \mathbb{R} - \{0, 1, -1\}$$

6.
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Vogliamo trovare $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t[\text{cof}(A)]$

$$\det(A) = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -10 + 30 + 60 = 80$$

$\det(A) \neq 0 \Rightarrow A$ è invertibile

Costruiamo ora la matrice dei cofattori $C := \text{cof}(A)$.

$$C = \begin{pmatrix} -5 & -30 & 20 \\ 22 & 20 & -8 \\ -1 & 10 & 4 \end{pmatrix}, \text{ dove } C_{i,j} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{i,j})$$

$\det(A_{i,j})$ rappresenta il minore di A ottenuto cancellando la riga i -esima e la colonna j -esima.

$${}^t C = \begin{pmatrix} -5 & 22 & -1 \\ -30 & 20 & 10 \\ 20 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

Allora:

$$A^{-1} = \frac{1}{80} \begin{pmatrix} -5 & 22 & -1 \\ -30 & 20 & 10 \\ 20 & -8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{16} & \frac{11}{40} & -\frac{1}{80} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{20} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(B) = 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 4 = 10 \neq 0$$

$${}^t \text{cof}(B) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 10 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Allora $B^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 10 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 & 0 \\ -1/5 & 3/10 & 1 \\ 1/5 & -3/10 & 0 \end{pmatrix}$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(C) = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -1 \left(1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \right)$$

$$= 25 - 10 + 15 = 30 \neq 0$$

$${}^t \text{cof}(C) = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ -15 & -10 & -5 & -5 \\ -15 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da qui possiamo trovare:

$$C^{-1} = \frac{1}{30} {}^t(\text{cof}(C)) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ -1/2 & -1/3 & -1/6 & -1/6 \\ -1/2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7.

$$1. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 14 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \quad (A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 14 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Il rango di A è uguale al massimo ordine dei minori non nulli di A per il Teorema degli ordini.

Prende per esempio:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -3 \neq 0 \quad \leftarrow \text{minore di ordine 2}$$

Si ha allora che $\det(A) \geq 2$.

Vogliamo ora "valore" questo minore per trovare una matrice 3×3 che lo contiene, ad esempio prendiamo tutta la matrice A :

$$\det A = -5 + 5 + 5 = 5 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3$$

Essendo $r(A)$ massima si ha $r(A) = r(A|b) = 3$ e per K-R-C si ha soluzione unica. Usiamo Cramer per trovarla:

↓ Possiamo usare perché $\det A \neq 0$ ed A è quadrata

$$A_x = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 14 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \quad \det A_x = 4$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 14 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \det(A_1) = 4$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 14 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \det(A_2) = 22$$

Possiamo ora trovare la nostra soluzione $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{4}{9}; \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{4}{9}; \quad x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{22}{9}$$

✓

$$2. \begin{cases} 2x_1 + ix_2 + x_3 = 1 - 2i \\ 2x_2 - ix_3 = -2 + 2i \\ ix_1 + ix_2 + ix_3 = 1 + i \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & i & 1 \\ 0 & 2 & -i \\ i & i & i \end{pmatrix}, \quad (A|b) = \begin{pmatrix} 2 & i & 1 & 1-2i \\ 0 & 2 & -i & -2+2i \\ i & i & i & 1+i \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} i & 1 \\ 2 & -i \end{pmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \det \begin{pmatrix} 2 & i & 1 \\ 0 & 2 & -i \\ i & i & i \end{pmatrix} = (2i-1) \cdot 2 + i(1-2) = 3i-2$$

Allora $r(A) = r(A|b) = 3$ e il sistema ha soluzione unica.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1-2i & i & 1 \\ -2+2i & 2 & -i \\ 1+i & i & i \end{pmatrix}, \quad \det(A_1) = \cancel{2i-1} - 2 + 3i$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1-2i & 1 \\ 0 & -2+2i & -i \\ i & 1+i & i \end{pmatrix}, \det A_2 = -3-2i$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & i & 1-2i \\ 0 & 2 & -2+2i \\ i & i & 1+i \end{pmatrix}, \det A_3 = -6+4i$$

Sei ha Mora!

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-2+3i}{3i-2} = 1, \quad x_2 = -\frac{(3+2i)}{3i-2}, \quad x_3 = \frac{-6+4i}{3i-2}$$

✓

$$3. \begin{cases} 2x_2 + kx_3 = 1 \\ kx_1 + 2x_2 = 2 \\ x_2 + kx_3 = 3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & k \\ k & 2 & 0 \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = -k(2k - k) = -k^2$$

Per $k \neq 0$ A ha rango massimo e $r(A) = r(A|b) = 3$, cioè x ha soluzione unica per $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & k \end{pmatrix}, \det A_1 = -6k$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & k \\ k & 2 & 0 \\ 0 & 3 & k \end{pmatrix}, \det A_2 = 2k^2$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ k & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \det A_3 = -5k$$

La soluzione x del tipo $\left(\frac{6}{k}, -2, \frac{5}{k}\right)$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Se $k = 0$ il sistema x è incompatibile perché $r(A) = 1 \neq 2 = r(A|b)$. ✓

$$9. \begin{cases} Kx_1 + x_3 = K \\ Kx_2 + 3x_3 = K \\ 2x_1 + Kx_2 + x_3 = K \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} K & 0 & 1 \\ 0 & K & 3 \\ 2 & K & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2(-K(K+1)) = -2K(K+1)$$

Se $K \neq 0, -1$ allora il sistema ammette una e una sola soluzione del tipo:

$$A_1 = \begin{pmatrix} K & 0 & K+1 \\ K & K & 3 \\ K & K & 1 \end{pmatrix}, \det A_1 = -2K^2$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & K & K+1 \\ 0 & K & 3 \\ 2 & K & 1 \end{pmatrix}, \det A_2 = -2K^2 + 4K$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & K \\ 0 & K & K \\ 2 & K & K \end{pmatrix}, \det A_3 = -2K^2$$

Dove si trova $\left(\frac{K}{1+K}, \frac{K-2}{K+1}, \frac{K}{1+K} \right)$ soluzione.

Se $K=0$ si ha $r(A)=r(A|b)=2$ e allora il sistema ammette ∞^1 soluzioni del tipo $(0, t, 0)$ con $t \in \mathbb{R}$.

Se $K=-1$ il sistema è incompatibile perché $r(A) \neq r(A|b)$.

✓

8. Sia A nilpotente di ordine s , cioè $A^s = 0$ e $A^k \neq 0 \quad \forall k=1, \dots, s-1$.

Supponi che, due $A, B \in M_n(K)$ vale $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Prendendo $B=A$ si ha:

$$\det(A^2) = \det(A \cdot A) = \det(A)\det(A) = (\det(A))^2$$

Si può procedere iterativamente trovando che:

$$\det(A^k) = (\det A)^k \quad \forall k \geq 1, k \text{ intero}$$

Prendendo $k=s$ si trova:

$$\det(A^s) = \det(0) = 0 = (\det A)^s \Rightarrow \det A = 0$$

Si è quindi trovato che $\det(A) = 0$ con A nilpotente di ordine s , cioè le
matrici nilpotenti non sono invertibili.