

GE 110 - TUTORATO 8

ES1

sia S la retta che cerchiamo

$$r \parallel S \iff \text{giac}(r) = \text{giac}(S)$$

$$\text{giac}(r) = ? \rightarrow \text{Sia } x=t \Rightarrow y=2t+4$$

$$r: \begin{cases} x=t \\ y=4+2t \end{cases} \quad \text{quindi: } \text{giac}(r) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

poiché le equazioni parametriche
sono della forma

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$$

$(x_0, y_0) = (2, 7)$ che è il nostro punto

$(a, b) = (1, 2)$ che è la nostra giacitura

$$\Rightarrow S: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 7 + 2t \end{cases}$$

ora vogliamo dare anche l'eq. cartesiana di S

$$\text{MODO 1: } \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 7 + 2t \end{cases} \quad \begin{cases} t = x - 2 \\ y = 7 + 2(x - 2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow S: 2x - y + 3 = 0$$

$$\text{MODO 2: } \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 7 + 2t \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2 = t \\ y - 7 = 2t \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(x-2) - (y-7) = 2x - y + 3 = 0$$

$$\Rightarrow S: 2x - y + 3 = 0$$

ES2

1. Scriviamo le rette in forma parametrica

$$r: x + 2y - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t \end{cases} \quad \text{giac}(r) = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$s: 4x + 6y + 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{4} - \frac{3}{2}t \\ y = t \end{cases} \quad \text{giac}(s) = \left\langle \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\text{giac}(r) \neq \text{giac}(s) \Rightarrow r \nparallel s \Rightarrow$ sono incidenti

troviamo il punto di intersezione

$$\begin{cases} X = 1 - 2t \\ Y = t \\ X = -\frac{3}{4} - \frac{3}{2}t \end{cases} \quad 1 - 2t = -\frac{3}{4} - \frac{3}{2}t \rightarrow 2t = 4 \rightarrow t = \frac{7}{2}$$
$$\begin{cases} X = 1 - 2t \\ Y = t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X = 1 - 7 = -6 \\ Y = \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$r \cap s = P = (-6, \frac{7}{2})$$

2. $r: X - Y = 0$ $s: \begin{cases} X = 3 - t \\ Y = -1 + 2t \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} X-3 & Y+1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2X - 6 + Y + 1 = 0 \Rightarrow s: 2X + Y = 5$$

$$\begin{cases} X - Y = 0 \\ 2X + Y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = Y \\ 3X = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = \frac{5}{3} \\ Y = \frac{5}{3} \end{cases} \quad r \cap s = P = (\frac{5}{3}, \frac{5}{3})$$

r e s sono incidenti, non possono essere // coincidenti:

perché $\text{giac}(r) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \neq \text{giac}(s) = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$

3. $r: \begin{cases} X = 1 + t \\ Y = -2 - t \end{cases}$ $s: \begin{cases} X = 4 - 2s \\ Y = -5 + 2s \end{cases}$

$$\text{giac}(r) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle \quad \text{giac}(s) = \langle \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle \Rightarrow r \parallel s$$

vediamo se le rette sono parallele distinte o coincidenti:

$$r: \begin{vmatrix} X-1 & Y+2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -X + 1 - Y - 2 = -X - Y - 1 = 0$$

$$s: \begin{vmatrix} X-4 & Y+5 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 2X - 8 + 2Y + 10 = 2X + 2Y + 2 = 0$$

$$\begin{cases} -X - Y - 1 = 0 \\ 2X + 2Y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -X - Y - 1 = 0 \\ -X - Y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{sono // coincidenti}$$

2)

$$i) \quad A = (2, -1) ; B = (3, 2) ; C = (4, 5)$$

Dati tre punti P_1, P_2, P_3 dello spazio affine $A^3(\mathbb{R})$ si dice collineari se
 $\dim \overline{P_1 P_2 P_3} \leq 1$

Se $\dim \overline{P_1 P_2 P_3} = 0$ tutti e tre i punti coincidono (coincidenza), se
 $\dim \overline{P_1 P_2 P_3} = 1$ i punti stanno sulla stessa retta (sono collineari). Richiedevano
 allora $\dim \overline{P_1 P_2 P_3} = 1$

Con $\overline{P_1 P_2 P_3} = S_{P_1, W}$ intersezione dello spazio affine passante per P_1 di
 dimensione W , con $W = \langle \overrightarrow{P_1 P_2}, \overrightarrow{P_1 P_3} \rangle$ ($\overrightarrow{P_1 P_2} = P_2 - P_1$)

Supponiamo che $\dim \overline{P_1 P_2 P_3} = \dim S_{P_1, W} = \dim W$, quindi affinché
 i tre punti siano collineari si deve avere $\dim W = 1$.

→

~~$$V_1 := \overrightarrow{P_1 P_2} = P_2 - P_1$$~~

$$V_1 := \overrightarrow{AB} = B - A = (1, 3)$$

$$V_2 := \overrightarrow{AC} = C - A = (2, 6)$$

Una $W = \langle V_1, V_2 \rangle = \langle V_2 \rangle$ in quanto i vettori sono
 proporzionali $\Rightarrow \dim W = 1 \Rightarrow$ i punti sono collineari

Basta allora trovare l'equazione cartesiana della retta passante per A e B .
 L'equazione cartesiana di una retta passante per due punti è data da

$$\begin{vmatrix} x-a & y-b \\ l & m \end{vmatrix} = 0$$

Dove in questo caso

$$A = (a, b) \text{ e}$$

$$\overrightarrow{AB} = (l, m)$$

Univoci:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Quindi:

$$(x-2)3 - y-1 = 0 \rightarrow 3x - y - 7 = 0$$

$$ii) \quad A = (5, 9) ; B = (-6, -2) ; C = (1, 3)$$

→

$$V_1 := \overrightarrow{AB} = (-11, -11)$$

$$V_2 := \overrightarrow{AC} = (-4, -6)$$

Allora $W = \langle V_1, V_2 \rangle \Rightarrow \dim W = 2$ perché V_1, V_2 sono linearmente indipendenti.

Allora i punti non sono allineati.

$$iii) \quad A = (2, 1) ; B = (3, k+1) ; C = (2+k, 2)$$

→

$$V_1 := \overrightarrow{AB} = (1, k)$$

$$V_2 := \overrightarrow{AC} = (k, 1)$$

Allora $W = \langle V_1, V_2 \rangle$ e $\dim W = 1 \Leftrightarrow k = \pm 1$

Per $k = \pm 1$ troviamo l'eq. cartesiana della retta passante per A e B

Per $k=1$ n ha :

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Uce-:

$$(x-2) - y + 1 = 0 \rightarrow x - y - 1 = 0$$

Per $k=-1$ n ha :

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Uce-:

$$-(x-2) - y + 1 = 0 \rightarrow x + y - 3 = 0$$

4) Determinare un'equazione cartesiana della retta r di $A^2(\mathbb{R})$ contenente i punti P e Q :

1) $P = (1, \frac{4}{3})$, $Q = (\frac{3}{2}, 1)$

→

Un'equazione parametrica è data da:

$$(1, \frac{4}{3}) + t (\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}) = (x, y)$$

Cioè:

$$x = 1 + \frac{1}{2}t \quad ; \quad y = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}t$$

Dalla prima si tiene $t = 2x - 2$, che sostituisce nella seconda fornisce l'eq. cartesiana per r :

$$y = -\frac{2}{3}x + 2$$

ii) $P = s \cap s'$, $A = t \cap t'$

$$s: x + 5y - 8 = 0 ; s': 3x + 6 = 0 ; t: 5x - \frac{y}{2} = 1 ; t': x - y = 5$$

→

Vediamo allora l'intersezione $s \cap s'$:

$$3x + 6 = 0 \rightarrow x = -2 ; x + 5y - 8 = 0 \xrightarrow{x=-2} y = 2$$

Quindi $P = (-2, 2)$

Analogamente si trova $A = (-\frac{1}{3}, -\frac{16}{3})$

Coni i due punti l'eq. parametrica:

~~$$(-2, 2) + t(-\frac{1}{3}, -\frac{16}{3}) = (x, y)$$~~

$$(-2, 2) + t(5/3, -22/3) = (x, y)$$

Con questa parametrazione si trova la seguente eq. cartesiana:

$$22x + 5y + 34 = 0$$

ES6

$$S_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_3 = 0\} \subset \mathbb{A}^3$$

la dimensione di S_1 è 2 infatti $x_1 + x_3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -s \\ x_2 = t \\ x_3 = s \end{cases}$
una base della giac. è $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$S_2: \begin{cases} X = 1 - t + 4s \\ Y = t \\ Z = 2t + s \\ W = 2 - s \end{cases} \quad \text{con } S_2 \subset \mathbb{A}^4(\mathbb{R})$$

poiché ci sono due parametri $(t, s) \rightarrow \dim(S_2) = 2$
una base della sua giacitura è $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

$$S_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_1 + 5x_2 = 7\} \subset \mathbb{A}^3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 = 7 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 7 \end{array} \right)$$

$$R_{12} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_{21}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & -9 & 1 & -14 \end{array} \right) \quad r(A) = r(A|b) = 2$$

$$\dim(S_3) = n - r(A) = 3 - 2 = 1$$

per trovare una base della giacitura risolviamo il S.L.o

$$\begin{cases} x_3 = t \\ -9x_2 = -t \\ x_1 = -5x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = t \\ x_2 = \frac{1}{9}t \\ x_1 = -\frac{5}{9}t \end{cases} \quad \text{base } \left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$$

$S_1 \cap S_3$ è un sottospazio affine $\Leftrightarrow S_1 \cap S_3 \neq \emptyset$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 = 7 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} R_{21}(-2) \\ R_{31}(-1) \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 7 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_{32}(-5)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} 4x_3 = 7 \\ x_2 = x_3 \\ x_1 = -x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \frac{7}{4} \\ x_2 = \frac{7}{4} \\ x_1 = -\frac{7}{4} \end{cases}$$

$S_1 \cap S_3$ è un punto $\Rightarrow S_1 \cap S_3 \neq \emptyset \Rightarrow S_1 \cap S_3$ è un sottospazio

$$\dim(S_1) + \dim(S_3) - \dim(A^3) \leq \dim(S_1 \cap S_3) \leq \min \left\{ \dim(S_1), \dim(S_3) \right\}$$

$\begin{matrix} 2 & 1 & 3 & & 2 & 1 \end{matrix}$

quindi $0 \leq \dim(S_1 \cap S_3) \leq 1$

se $\dim(S_1 \cap S_3) = 0$ è un punto

se $\dim(S_1 \cap S_3) = 1$ è una retta

per quanto detto prima $S_1 \cap S_3$ è un punto
 $\Rightarrow \dim(S_1 \cap S_3) = 0$

ES 5

$$r: \begin{cases} X = 3 + t \\ Y = -1 - t \\ Z = 2 + 2t \end{cases} \quad s: \begin{cases} X = 2 - s \\ Y = 1 + s \\ Z = 2 + s \end{cases}$$

$$\text{giac}(r) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{giac}(s) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow r \nparallel s$$

Visto che non siamo in un piano $r \nparallel s \Rightarrow$ incidenti.
vediamo se l'intersezione tra le rette è o no vuota

eq. cartesiane di $r \rightarrow \begin{pmatrix} X-3 & Y+1 & Z-2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} X-3 & Y+1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -X+3-Y-1 = -X-Y+2=0$$

$$\begin{vmatrix} Y+1 & Z-2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2Y+2+Z-2 = 2Y+Z=0$$

$$r: \begin{cases} X+Y-2=0 \\ 2Y+Z=0 \end{cases}$$

eq. cartesiane di $s \rightarrow \begin{pmatrix} X-2 & Y-1 & Z-2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} Y-1 & Z-2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = Y-1-Z+2 = Y-Z+1=0$$

$$\begin{vmatrix} X-2 & Y-1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = X-2+Y-1 = X+Y-3=0$$

$$s: \begin{cases} X+Y-3=0 \\ Y-Z+1=0 \end{cases}$$

notiamo che la prima eq. di r è $x+y=2$ mentre la prima eq. di S è $x+y=3$

$\Rightarrow r$ e S non sono incidenti perché non hanno punti di intersezione.
 $\Rightarrow r$ e S sono sghembe

ES7

$$W = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 + 3x_4 = x_3 = 0 \right\}$$

1. $\begin{cases} x_1 + 3x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \leftarrow \text{eq. cartesiane}$

$\Rightarrow \dim(W) = 2$

eq. parametriche $\rightarrow \begin{cases} x_1 = -3t \\ x_2 = s \\ x_3 = 0 \\ x_4 = t \end{cases}$

2. $P = (1, 2, 0, -1)$

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

eq. parametriche: $\begin{cases} x_1 = 1 - 3t \\ x_2 = 2 + s \\ x_3 = 0 \\ x_4 = -1 + t \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} x_1 - 1 & x_2 - 2 & x_3 & x_4 + 1 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 - 1 & x_2 - 2 & x_4 + 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x_1 - 1 & x_4 + 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -x_1 + 1 - 3x_4 - 3 = 0$$

$$\begin{vmatrix} x_2 - 2 & x_3 & x_4 + 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_3 & x_4 + 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = x_3 = 0$$

eq. cartesiane: $\begin{cases} -x + 3x_4 - 2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

8) $V = \text{IM}_2(\mathbb{R})$, $A = V$ spazio affine su $\mathbb{R}$ verso.

Si ha $\{O, B_1, B_2, B_3, B_4\}$ riferimento affine. Vogliamo le coordinate di C nel sistema di riferimento considerato.

$$O = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

→

Vogliamo risolvere il seguente sistema di equazioni:

$$C = O + x_1 B_1 + x_2 B_2 + x_3 B_3 + x_4 B_4$$

Avv:

$$\begin{cases} 1 + x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ -1 + x_2 = 2 \\ 1 + x_4 = 3 \\ 1 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Da qui si fa il vettore che:

$$x_1 = -10; \quad x_2 = 3; \quad x_3 = 0; \quad x_4 = 2$$