GE110 - Geometria e algebra lineare 1

Tutorato 1

Tutori: Eleonora Pini, Federico Galanti

3 marzo 2025

Esercizio 1. Siano A, B, C le seguenti matrici a coefficienti in $\mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

se possibile, calcolare le seguenti:

1. ${}^tA$
2. $B + C$
3. AC
4. CA
5. $(BC) \cdot A$
6. ${}^t(BC)$
7. $({}^tCA) \cdot B$
8. $3 \cdot ({}^tB) + AC$

Esercizio 2. Siano A, B, C, $X \in M_2(\mathbb{R})$ e $D \in M_2(\mathbb{C})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 2 & -i \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

Calcolare:

1. $A - 4C$
2. $B - \frac{1}{2}A + C$
3. $AC - 3B$

4. ${}^tA - 2C + D^2$

5. $D\,{}^tD$

6. $3B - 2(A+B) + C - D$

7. $3X + 2A - B - 3(A+2X) = O_2$

8. $4(A-X) + 3(2X-C) - 4A + B = O_2$

Esercizio 3. Stabilire se le seguenti sono o meno matrici simmetriche:

1. A = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & k \\ 3 & -3 & 2 \\ k & 2 & 5 \end{pmatrix}$

2. B = $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -7 \\ -1 & 7 & -3 \end{pmatrix}$

3. C = $\begin{pmatrix} 7 & k^2+2k-8 & 2 \\ k^3+5k^2+4k & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Esercizio 4. Stabilire se le seguenti sono o meno matrici antisimmetriche:

1. A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 \\ -2 & -3 & 1 \\ 7 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

2. B = $\begin{pmatrix} 0 & -4 & -3 \\ 4 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3. C = $\begin{pmatrix} k^2-4 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & \frac{k}{2} \\ -5 & k-3 & 0 \end{pmatrix}$

Esercizio 5. Determinare una matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$, diversa dalla matrice identità I_2, tale che $A^2 = A$.

Esercizio 6. Determinare una matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$, diversa dalla matrice nulla O_2, tale che $A^2 = O_2$.

Esercizio 7. Sia $A \in M_3(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica, dimostrare che

$$A^2 = O \iff A = O$$

Esercizio 8. Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$:

1. A è una matrice diagonale?
2. A è una matrice invertibile? Se sì, provare a esibirne l'inversa.

Esercizio 9. Siano A, $B \in M_{m,n}$. Dimostrare che ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$.
Reminder: per il prodotto invece vale la formula ${}^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA$ (dimostrato a lezione).