GE110 - Geometria e algebra lineare 1

Tutorato 3

Tutori: Eleonora Pini & Federico Galanti

17 marzo 2025

Esercizio 1. *Stabilire se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono dei sottospazi vettoriali.*

1. $H_1 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$;
2. $H_2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 \geq 0\}$;
3. $H_3 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 x_2 = 0\}$;
4. $H_4 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = x_2 = 0\}$;
5. $H_5 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Q}\}$;
6. $H_6 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2 - x_3^2 = 0\}$;
7. $H_7 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = x_3 - 1 = 0\}$;

Esercizio 2. *Provare che l'insieme $\mathbb{R}_4(x)$ dei polinomi di grado ≤ 4 è uno spazio vettoriale.*
Successivamente, stabilire se il sottoinsieme di $\mathbb{R}_4(x)$ costituito dai polinomi di grado esattamente 4 è un sottospazio vettoriale.

Esercizio 3. *Sia $\mathscr{F}$ lo spazio delle funzioni reali di variabile reale. Si considerino i sottoinsiemi:*

1. $H_1 := \{f \in \mathscr{F} : f(3) = 0\}$;
2. $H_2 := \{g \in \mathscr{F} : g(2) = g(4)\}$;
3. $H_3 := \{h \in \mathscr{F} : h(7) = 1 + h(0)\}$

Quali di questi sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali di $\mathscr{F}$?

Esercizio 4. *Dimostrare che l'insieme $\mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ delle matrici di tipo $m \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$ è uno spazio vettoriale.*

Esercizio 5. *Si considerino in $\mathbb{R}^4$ i seguenti sottospazi:*

$$S := \{(x, y, z, w) : \ x - 2z = 0, \ y + w = 0\}$$

$$T := \{(x, y, z, w) : \ x + z = 0, \ 3y - 2w = 0\}$$

Determinare $S \cap T$ e $S + T$.

Esercizio 6. *Trovare i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che i vettori di $\mathbb{R}^4$:*

$$v_1 = (1, 0, 1, 0); \ v_2 = (0, 1, -1, 0); \ v_3 = (0, -1, \lambda, 1)$$

sono linearmente indipendenti.

Esercizio 7. *Siano:*

$$v_1 = (1,1,1),\ v_2 = (0,2,3) \in \mathbb{R}^3$$

(i) *Far vedere che* $\{v_1, v_2\}$ *sono linearmente indipendenti;*
(ii) *Determinare* $v_3 \in \mathbb{R}^3$ *così che* v_1, v_2, v_3 *siano linearmente indipendenti;*
(iii) *Esprimere i vettori:*

$$e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1) \in \mathbb{R}^3$$

come combinazioni lineari di v_1, v_2, v_3.

Esercizio 8. *Determinare un insieme di vettori* $\{v_1, ..., v_r\}$ *tali che* $W_i = \langle v_1, ..., v_r \rangle$, *dove* $i = 1,2,3$

1. $W_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \}$

2. $W_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 2x_3 = 0\}$

3. $W_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \}$

Esercizio 9. *Si discutano i seguenti sistemi* al variare *del parametro* $k \in \mathbb{R}$*:*

1. $\begin{cases} kX_1 - 2X_2 = k + 1 \\ X_1 + (k+3)X_2 = 0 \\ (k-1)X_1 - (k+5)X_2 = k + 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} X_1 + kX_2 + 2X_3 = 1 \\ X_1 + X_2 + 3X_3 = 2 \\ 2X_1 + kX_2 + X_3 = 1 \\ 3X_1 + 2kX_2 + 3X_3 = 2 \end{cases}$