GE110 - Geometria e algebra lineare 1

Tutorato 4

Tutori: Eleonora Pini, Federico Galanti

24 marzo 2025

Esercizio 1. Stabilire se i seguenti insiemi di vettori di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente dipendenti o indipendenti, se generano tutto lo spazio e se costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$.
Se sono dipendenti, scriverne uno come combinazione lineare degli altri.

1. $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix};$

2. $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix};$

3. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix};$

4. $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Esercizio 2. Dati i sottospazi di $\mathbb{R}^3$

$$W_1 = < \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} > \qquad W_2 = \{x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$$

stabilire se $W_1 \subseteq W_2$, $W_2 \subseteq W_1$ oppure nessuna delle due.

Esercizio 3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 e sia $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ base di V, preso W un sottospazio di V tale che $W = < v_1, v_2, v_3 >$ dove

$$v_1 = e_1 - e_4, \quad v_2 = 2e_3 + e_4, \quad v_3 = 2e_1 - e_2 + 2e_4$$

stabilire la dimensione di W, esibire una base di W, infine fare il completamento alla base per ottenere una base di V.

Esercizio 4. Verificare o confutare: $GL_n(\mathbb{K})$ è un sottospazio vettoriale di $M_n(\mathbb{K})$.

Esercizio 5. In $M_2(\mathbb{R})$ si considerino le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Verificare che l'insieme $K = \{A, B, C, D\}$ è una base di $M_2(\mathbb{R})$ ed esprimere la matrice $E = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ nella base K.

Esercizio 6. Dati i seguenti vettori:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \; b = \begin{pmatrix} k+3 \\ k-1 \\ -2 \end{pmatrix} \; c = \begin{pmatrix} k^2-1 \\ k-1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Determinare i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ per cui i vettori a, b, c risultino essere linearmente indipendenti.

Esercizio 7. Siano W_1 e W_2 due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$ tali che

$$W_1 = < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} > \quad W_2 = < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} >$$

trovare $W_1 \cap W_2$ e stabilire la dimensione di $W_1,\ W_2$ e $W_1 \cap W_2$.

Esercizio 8. Mostrare che due sottospazi di dimensione 4 in $\mathbb{R}^7$ hanno sempre intersezione non banale.

Esercizio 9. Si consideri il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^4$

$$U = \{(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y + z = z + u = 0\}$$

1. Determinare una base per U;
2. Costruire un sottospazio $V \subset \mathbb{R}^4$ tale che $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$.

Esercizio 10. Stabilire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ i tre vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ t \\ 11 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^3$.
Determinare inoltre l'insieme dei $t \in \mathbb{R}$ per cui i vettori sono linearmente dipendenti e per tali valori completare a una base di $\mathbb{R}^3$.