GE110 - Geometria e algebra lineare 1

Tutorato 5

Tutori: Eleonora Pini & Federico Galanti

31 marzo 2025

Esercizio 1. *Calcolare il rango delle seguenti matrici al variare di $\lambda, k \in \mathbb{R}$:*

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & k \\ 1 & k & 2 & 1 \\ k+1 & 0 & k+1 & 1 \end{pmatrix}$

3. $C = \begin{pmatrix} 1 & k & -2 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$

4. $D = \begin{pmatrix} 1+k & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2k+2 & 2+k & 1 \\ 0 & -3k+1 & 1 \end{pmatrix}$

Esercizio 2. *Siano $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, si stabilisca quali delle seguenti affermazioni sono vere:*
(si fornisca una dimostrazione quando è vero e un controesempio quando è falso)

1. $r(A) \leq \min\{m, n\}$;

2. $r(A+B) \leq \min\{r(A), r(B)\}$;

3. $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$.

Esercizio 3. *Sia* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{K})$:

1. *Trovare almeno una sottomatrice che abbia rango 2.*

2. *Trovare, se esiste, una sottomatrice che abbia rango 3. Cosa puoi dedurre sul rango di A?*

Esercizio 4. *Utilizzando il teorema di Kronecker-Rouché-Capelli si determini se i seguenti sistemi di equazioni lineari sono o meno compatibili, in caso affermativo calcolarne le soluzioni.*

1. $\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 = 1 \\ -X_1 + X_2 + 5X_3 = 0 \\ 2X_2 + 6X_3 = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2X_1 + X_2 + X_3 = 0 \\ X_1 + X_2 + X_3 = 1 \\ 3X_1 + X_2 - X_3 = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} X_1 - X_2 = 2 \\ 3X_1 + X_2 - 2X_3 = 0 \\ X_1 - X_2 = -1 \end{cases}$

Esercizio 5. *Si considerino i sottospazi* $U = \langle u_1, u_2 \rangle$ *e* $V = \langle v \rangle$ *di* $\mathbb{R}^4$*, dove:*

$$u_1 = (1,2,3,4); \qquad u_2 = (-1,1,1,2); \qquad v = (1,8,11,16)$$

Calcolare $\dim(U)$, $\dim(V)$, $\dim(U+V)$ *e* $\dim(U \cap V)$.

Esercizio 6. *Utilizzando il teorema di Kronecker-Rouché-Capelli si determinino le soluzioni dei seguenti sistemi di equazioni lineari, al variare del parametro* $k \in \mathbb{R}$.

1. $\begin{cases} X_2 + kX_3 = k+1 \\ X_1 + X_2 + X_3 = 2 \\ kX_1 + X_2 = 1+k \end{cases}$

2. $\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 = k \\ X_1 + X_2 - X_3 = 1 \\ 2X_1 + X_2 + kX_3 = k+1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} X_1 + X_2 = -k \\ kX_1 + (k-2)X_2 = -1 \\ (1+k)X_1 + kX_2 = 2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} (k+1)X_1 + (k-1)X_2 + X_3 = 0 \\ (2k-1)X_1 + X_2 + (k-1)X_3 = k \end{cases}$

Esercizio 7. *Sia* $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 1}$ *lo spazio vettoriale dei polinomi di grado al più* 1

1. *Dimostrare che* $B_1 = \{1, 1+x\}$ *e* $B_2 = \{1-x, 2x\}$ *sono due basi di* V.
2. *Trovare le coordinate dei seguenti vettori di* V *rispetto alla base* B_1 *e rispetto alla base* B_2

$$v_1 = 1 \qquad v_2 = x \qquad v_3 = 3x+3$$

Esercizio 8. *Usando il concetto di rango, stabilire se le seguenti matrici sono o meno invertibili:*

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

3. $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

4. $D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Esercizio 9. *Siano U, V due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$ di dimensione* 2.

1. *Dimostrare che $U \cap V \neq \{0\}$;*

2. *Determinare tutte le possibili intersezioni e descrivere un esempio per ognuna di esse.*

Esercizio 10. *Siano $v_1, ..., v_k$ vettori in $\mathbb{R}^n$ $(k \leq n)$ e sia $A \in M_{n,k}$ la matrice ottenuta incolonnando suddetti vettori, dimostrare che $v_1, ..., v_k$ sono linearmente indipendenti se e solo se $r(A) = k$*