GE110 - Geometria e algebra lineare 1

Tutorato 7

Tutori: Eleonora Pini & Federico Galanti

15 aprile 2025

Esercizio 1. *Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il seguente sistema lineare:*

$$\begin{cases} X_1 + kX_2 + X_3 = -k \\ X_1 - X_2 - X_3 + X_4 = 0 \\ -X_2 - kX_3 + kX_4 = -k^2 \\ X_1 + kX_2 + kX_3 - X_4 = 0 \end{cases}$$

Utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss-Jordan determinare i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile, e in tal caso calcolare esplicitamente le soluzioni.

Esercizio 2. *Sia $a \in \mathbb{R}$ si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a & 2 & 1 \\ 1 & a & 2 \end{pmatrix}$$

1) *Determinare i valori di a per cui la matrice è invertibile e per tali valori calcolare l'inversa A^{-1}.*
2) *Si consideri la seguente matrice*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinare i valori di a per cui esiste una matrice $M \in M_3$ tale che $AM = B$ (senza ridurre il problema a un sistema lineare negli elementi di M).

Esercizio 3. *Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia $V = \mathbb{R}^4$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Siano*

$$v_1 = (k, 0, 1, 1) \quad v_2 = (1, k, 0, k) \quad v_3 = (1, 0, 0, k) \quad v_4 = (1, 1, k, 0)$$

$$U = < v_1, v_2 >, \qquad W = U \cap < v_3, v_4 >$$

1) *Calcolare la dimensione di U e W usando esclusivamente operazioni elementari sui vettori;*
2) *Calcolare la dimensione di $U \cap W$ e di $U + W$, usando esclusivamente operazioni elementari sui vettori;*
3) *Determinare se esistono valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $U \oplus W = V$.*