GE110 - Geometria e algebra lineare 1

Tutorato 8

Tutori: Eleonora Pini & Federico Galanti

5 maggio 2025

Esercizio 1. *Sia $\mathbb{A}^2$ lo spazio affine su $\mathbb{R}^2$, determinare le equazioni parametriche e cartesiane della retta passante per il punto $Q = (2, 7)$ e parallela alla retta $r : 2X - Y + 4 = 0$.*

Esercizio 2. *Sia $\mathbb{A}^2$ lo spazio affine su $\mathbb{R}^2$, stabilire se le seguenti rette sono parallele e coicidenti, parallele distinte o incidenti.*
Nel caso fossero incidenti trovare il loro punto di intersezione.

1. $r : X + 2Y - 1 = 0 \qquad s : 4X + 6Y + 3 = 0$
2. $r : X - Y = 0 \qquad s : \begin{cases} X = 3 - t \\ Y = -1 + 2t \end{cases}$
3. $r : \begin{cases} X = 1 + t \\ Y = -2 - t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} X = 4 - 2s \\ Y = -5 + 2s \end{cases}$

Definizione. *Tre punti P_1, P_2, P_3 in uno spazio affine si dicono* allineati *se* $\dim \overline{P_1P_2P_3} \leq 1$.

Esercizio 3. *Stabilire se i seguenti punti $A, B, C \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ sono allineati e, in caso affermativo, trovare le equazioni cartesiane della retta che li contiene. Quando c'è un parametro, discuterlo.*

1. $A = (2, -1),\ B = (3, 2),\ C = (4, 5)$;
2. $A = (5, 9),\ B = (-6, -2),\ C = (1, 3)$;
3. $A = (2, 1),\ B = (3, k + 1),\ C = (2 + k, 2)$.

Esercizio 4. *Determinare un'equazione cartesiana della retta r di $A^2(\mathbb{R})$ contenente i punti P e Q:*

1. $P = (1, \frac{4}{3}),\ Q = (\frac{3}{2}, 1)$;
2. $P = s \cap s',\ Q = t \cap t'$;

Dove s, s', t, t' sono le seguenti rette:

$$s : x + 5y - 8 = 0,\ s' : 3x + 6 = 0,\ t : 5x - \frac{y}{2} = 1,\ t' : x - y = 5$$

Esercizio 5. *Date le rette di equazioni parametriche:*

$$r : \begin{cases} X = 3 + t \\ Y = -1 - t \\ Z = 2 + 2t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} X = 2 - s \\ Y = 1 + s \\ Z = 2 + s \end{cases}$$

determinare se sono parallele, incidenti o sghembe.

Esercizio 6. *Dati i seguenti sottospazi affini calcolarne la dimensione e trovare una base della loro giacitura:*

$$S_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_3 = 0\} \subset \mathbb{A}^3$$

$$S_2 : \begin{cases} X = 1 - t + 4s \\ Y = t \\ Z = 2t + s \\ W = 2 - s \end{cases} \subset \mathbb{A}^4(\mathbb{R})$$

$$S_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ x_1 + 5x_2 = 7\} \subset \mathbb{A}^3$$

Stabilire se $S_1 \cap S_3$ è un sottospazio affine, stimare la sua dimensione e per ogni dimensione possibile indicare a che oggetto geometrico corrisponde.
Nel caso sia un sottospazio, determinarne infine l'effettiva dimensione.

Esercizio 7. *Si consideri il seguente sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$*

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 3x_4 = x_3 = 0\}$$

1. *Determinare le equazioni parametriche di W;*
2. *Sia $\mathbb{A}^4$ lo spazio affine di $\mathbb{R}^4$ su se stesso e sia $P = (1, 2, 0, -1) \in \mathbb{A}^4$, determinare equazioni parametriche e cartesiane per $\mathcal{S}_{P,W}$.*

Esercizio 8. *Sia $V = M_2(\mathbb{R})$ e $A = V$ uno spazio affine su se stesso. Prendiamo O come origine e $\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ una base.*

$$O = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B_4 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcolare le coordinate della matrice C nel riferimento affine $\{O, B_1, B_2, B_3, B_4\}$, dove:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$