

GE110 - Geometria e algebra lineare 1

Tutorato 9

Tutori: Eleonora Pini, Federico Galanti

12 maggio 2025

Esercizio 1. Sia \mathbb{A} un piano affine su V con riferimento affine $\{O, e_1, e_2\}$ e coordinate X, Y . Siano $r : X + 2Y - 3 = 0$ e $s : X - Y - 1 = 0$ due rette nel piano affine, stabilire se sono parallele distinte, parallele coincidenti o incidenti.

Nel caso fossero incidenti trovare le coordinate del punto di intersezione usando la regola di Cramer.

Esercizio 2. Siano π_1 e π_2 due piani in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ scrivere le loro equazioni parametriche e cartesiane rispettando le seguenti proprietà:

- π_1 passa per $A(2, 0, -1)$ ed è parallelo alle rette

$$\begin{cases} x = -3 + 2s \\ y = 1 - s \\ z = 2 + s \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 \\ z = 1 - t \end{cases}$$

- π_2 passa per $B(1, 2, 0)$ e $C(2, -1, 5)$ e un vettore della sua giacitura è $w = (1, 1, 1)$.

Esercizio 3. Siano A, B, C tre punti nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, scrivere l'equazione cartesiana del piano da loro generato verificando che siano non allineati.

$$A = (1, 0, 2) \quad B = (-2, 5, 1) \quad C = (3, -1, 0)$$

Esercizio 4. Dati in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ il piano π di equazione $2x + 3y - z = 4$ e la retta r di equazioni

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

determinare se r e π sono paralleli, uno contenuto in un altro o incidenti. Indicare l'eventuale intersezione.

Esercizio 5. Sia \mathbb{A} uno spazio affine di dimensione 3 con riferimento affine $\{O, e_1, e_2, e_3\}$ e coordinate X, Y, Z , per ciascuna delle seguenti coppie di rette di \mathbb{A} stabilire se sono complanari o sghembe.

$$\begin{array}{ll}
 r : \begin{cases} x - 2z - 2 = 0 \\ y - 3z - 1 = 0 \end{cases} & r' : \begin{cases} x - z - 6 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \\
 s : \begin{cases} x = \frac{1}{2} - \frac{t}{2} \\ y = t \\ z = 1 \end{cases} & s' : \begin{cases} x = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}t \\ y = \frac{4}{3} - \frac{t}{3} \\ z = t \end{cases} \\
 t : \begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \\ y + z + 3 = 0 \end{cases} & t' : \begin{cases} 2x - 4y + 5 = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}
 \end{array}$$

Nel caso siano complanari dire se sono parallele distinte, parallele coincidenti o incidenti. Se incidenti trovare il punto di intersezione.

Esercizio 6. Si consideri il seguente sottospazio affine di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$:

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 - 1 = x_2 - x_1 = 0\}$$

1. Descrivere S e determinare la sua giacitura;
2. Se possibile, trovare un piano π_1 che contiene S ;
3. Se possibile, trovare un piano π_2 disgiunto da S .

Esercizio 7. Si consideri il seguente sottospazio affine di $\mathbb{A}^5(\mathbb{R})$:

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_2 - 2x_3 + 4 = x_3 - x_4 - 1 = 3x_1 = 0\}$$

- Determinare dimensione, giacitura e equazioni parametriche di S .
- Soddisfare le seguenti richieste o argomentare perché non sono soddisfacibili:
 1. trovare un piano $\pi_1 \subset \mathbb{A}^5(\mathbb{R})$ tale che $\pi_1 \cap S$ sia un punto;
 2. trovare un piano $\pi_2 \subset \mathbb{A}^5(\mathbb{R})$ tale che $\pi_2 \cap S$ sia una retta;
 3. trovare una retta $r_1 \subset \mathbb{A}^5(\mathbb{R})$ che contiene S ;
 4. trovare una retta $r_2 \subset \mathbb{A}^5(\mathbb{R})$ tale che $r_2 \parallel S$;
 5. trovare un iperpiano disgiunto da S .

Esercizio 8. Sia data in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ la retta r di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

Determinare due sottospazi affini di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ la cui intersezione è r .