UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE210 - Geometria 2

a.a. 2018-2019

Prova scritta del 19-9-2019

TESTO E SOLUZIONI

Svolgere tutti gli esercizi.

1. Sia k un numero reale. Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ una sua base.

(a) Mostrare che esiste un'unica forma bilineare simmetrica $b : V \times V \to \mathbb{R}$ tale che

$$b(e_1, e_1) = k, b(e_3, e_3) = -k, b(e_1, e_3) = -k, b(e_2, e_2) = 1, b(e_2, e_3) = -1$$

e che e_1 è perpendicolare a $e_1 - e_2$ rispetto a b.

(b) Calcolare la matrice di b nella forma canonica di Sylvester.

(c) Sia $k = 1$. Sia $F : V \to V$ un operatore tale che $M_e(F) = M_e(b)$ e

$$b(F(v), w) = b(v, w), \text{per ogni } v, w \in V.$$

Mostrare che ogni autovettore di F è isotropo rispetto a b.

(d) Determinare i valori di k per i quali b definisce un prodotto scalare su V e calcolare l'angolo tra e_1 ed $e_1 + e_3$ e il prodotto vettoriale $e_2 \wedge (\frac{1}{\sqrt{-1-k}}(e_2 + e_3))$.

SOLUZIONE:

(a) Per ipotesi abbiamo $b(e_1, e_1 - e_2) = 0$, da cui $b(e_1, e_2) = b(e_1, e_1) = k$. Questo definisce univocamente una forma bilineare simmetrica b su V tale che

$$M_e(b) = \begin{pmatrix} k & k & -k \\ k & 1 & -1 \\ -k & -1 & -k \end{pmatrix}.$$

(b) Si ha $b(e_2, e_2) = 1$, quindi e_2 non è isotropo. Sia $v = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$. Si ha $b(e_2, v) = 0$ se e solo se $x_1b(e_2, e_1) + x_2b(e_2, e_2) + x_3b(e_2, e_3) = 0$ ovvero se e solo se

$$kx_1 + x_2 - x_3 = 0.$$

Scelti $x_1 = 0, x_2 = x_3 = 1$ si ha che $e_2 + e_3$ è tale che $b(e_2, e_2 + e_3) = 0$. Inoltre e_2 ed $e_2 + e_3$ sono linearmente indipendenti. Per diagonalizzare b cerchiamo ora un vettore v tale che $b(e_2, v) = 0, b(e_2 + e_3, v) = 0$ e $e_2, e_2 + e_3, v$ sono linearmente indipendenti.
Le condizioni $b(e_2, v) = 0, b(e_2 + e_3, v) = 0$ danno il sistema

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -(1+k)x_3 = 0 \end{cases}$$

che ha per esempio come soluzione $x_1 = 1, x_2 = -k, x_3 = 0$ ovvero $v = e_1 - ke_2$. Si verifica subito che $e_2, e_2 + e_3, e_1 - ke_2$ sono linearmente indipendenti e quindi la matrice di b in tale base è diagonale. Inoltre

$$b(e_2 + e_3, e_2 + e_3) = -1 - k, b(e_1 - ke_2, e_1 - ke_2) = k(1-k).$$

Deduciamo pertanto che la forma canonica di Sylvester di b sarà:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ se } k < -1 \text{ o } 0 < k < 1; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ se } k = -1, 0, 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ se } -1 < k < 0 \text{ o } k > 1.$$

(c) Sia v un autovettore di F con autovalore λ e supponiamo che $b(v, v) \neq 0$. Si ha

$$b(v, v) = b(F(v), v)) = b(\lambda v, v)) = \lambda b(v, v)$$

da cui $\lambda = 1$. Ma il polinomio caratteristico di F, per $k = 1$ e $\lambda = 1$ da

$$0 = \begin{vmatrix} 1-1 & 1 & -1 \\ 1 & 1-1 & -1 \\ -1 & -1 & -1-1 \end{vmatrix} = 4$$

contraddizione. Dunque v è isotropo.
(d) Si osserva dalla (b) che non ci sono valori di k per i quali b definisce un prodotto scalare su V. ∎

2. Sia K un campo e sia $k \in K$. In $\mathbb{P}^4_K$ con coordinate omogenee $X_0, \ldots, X_4$, consideriamo le seguenti rette:

$$r_1 : \begin{cases} X_1 = 0 \\ X_4 = 0 \\ X_2 + X_3 = 0 \end{cases}, r_2 : \begin{cases} X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \\ X_3 = 0 \end{cases}$$

ed i seguenti piani

$$p_1 : \begin{cases} X_2 = 0 \\ X_4 = 0 \end{cases}, p_2 : \begin{cases} X_1 = 0 \\ X_2 + kX_0 = 0 \end{cases}.$$

(a) Determinare la dimensione di $L(r_1, p_1)$ e di $L(r_2, p_2)$.
(b) Determinare per quali k esiste una proiettività di $\mathbb{P}^4_K$ che manda $L(r_1, p_1)$ in $L(r_2, p_2)$ e quando esiste scriverla esplicitamente in coordinate.
(c) Determinare per quali k esistono $P_1 \in r_1, P_2 \in r_2, Q_1 \in p_1, Q_2 \in p_2$ tali che P_1, P_2, Q_1, Q_2 sono in posizione generale.

SOLUZIONE:

(a) Si ha

$$r_1 \cap p_1 : \begin{cases} X_1 = 0 \\ X_4 = 0 \\ X_2 + X_3 = 0 \\ X_2 = 0 \end{cases}$$

quindi $r_1 \cap p_1 = \{[1, 0, 0, 0, 0]\}$ è un punto mentre

$$r_2 \cap p_2 : \begin{cases} X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \\ X_3 = 0 \\ X_2 + kX_0 = 0 \end{cases}$$

quindi, se $k = 0$ si ha che $r_2 \cap p_2 = \{[a, 0, 0, 0, b], a, b \in K\}$ è una retta mentre se $k \neq 0$ si ha che $r_2 \cap p_2 = \{[0, 0, 0, 0, 1]\}$ è un punto. Per la formula di Grassmann deduciamo che

$$\dim L(r_1, p_1) = \dim r_1 + \dim p_1 - \dim r_1 \cap p_1 = 3$$

mentre

$$\dim L(r_2, p_2) = \dim r_2 + \dim p_2 - \dim r_2 \cap p_2 = \begin{cases} 2 & \text{se } k = 0 \\ 3 & \text{se } k \neq 0 \end{cases}.$$

(b) Dato che una proiettività conserva la dimensione, se esiste una proiettività di $\mathbb{P}^4_K$ che manda $L(r_1, p_1)$ in $L(r_2, p_2)$ allora deve essere $k \neq 0$. E, in tal caso, basta osservare che $L(r_1, p_1)$ è l'iperpiano di equazione $X_4 = 0$ mentre $L(r_2, p_2)$ è l'iperpiano di equazione $X_1 = 0$. Quindi $f(X_0, X_1, X_2, X_3) = (X_0, X_4, X_2, X_1)$ è una proiettività di $\mathbb{P}^4_K$ che manda $L(r_1, p_1)$ in $L(r_2, p_2)$.
(c) I possibili punti sono $P_1 = [a_0, 0, a_2, -a_2, 0], P_2 = [b_0, 0, 0, 0, b_4], Q_1 = [c_0, c_1, 0, c_3, 0], Q_2 = [d_0, 0, -kd_0, d_3, d_4]$. Dunque per esempio $P_1 = [0, 0, 1, -1, 0], P_2 = [0, 0, 0, 0, 1], Q_1 = [0, 1, 0, 0, 0], Q_2 = [0, 0, 0, 1, 0]$ sono in posizione generale per ogni k. ■

3. Siano $k, h \in \mathbb{R}$ e siano $\mathcal{C}_k$ la conica (affine o euclidea) di equazione

$$kX^2 + 4kY^2 + 4kXY + X = 0$$

e $\mathcal{D}_h$ la conica (affine o euclidea) di equazione

$$hX^2 + Y^2 - 1 = 0.$$

(a) Determinare per quali k, h si ha che $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono non degeneri, semplicemente degeneri o doppiamente degeneri e sono (o no) a centro.
(b) Determinare l'equazione canonica euclidea di $\mathcal{C}_k$ per ogni k.
(c) Determinare i valori k e di h per cui $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono affinemente equivalenti (nel caso affine) o congruenti (nel caso euclideo).

SOLUZIONE:

(a) Si osservi che se $k = 0$ si ha che $\mathcal{C}_k$ non è una conica, quindi $k = 0$ è da ora in poi escluso. La matrice di $\mathcal{C}_k$ è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & k & 2k \\ 0 & 2k & 4k \end{pmatrix}$$

e si ha $\det A = -k \neq 0$ e pertanto

$$\mathcal{C}_k \text{ è non degenere per ogni } k \neq 0.$$

Invece

$$A_0 = \begin{pmatrix} k & 2k \\ 2k & 4k \end{pmatrix}$$

e si ha $\det A_0 = 0$ e pertanto

$$\mathcal{C}_k \text{ non è a centro per ogni } k \neq 0.$$

Dunque $\mathcal{C}_k$ è una parabola non degenere per ogni $k \neq 0$.
La matrice di $\mathcal{D}_h$ è

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e si ha che

$$\mathcal{D}_h \text{ è semplicemente degenere per } h = 0, \text{ non degenere per } h \neq 0.$$

Inoltre

$$B_0 = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e si ha $\det B_0 = h$ e pertanto

$$\mathcal{D}_h \text{ è a centro se e solo se } h \neq 0.$$

(b) Diagonalizziamo A_0. Si ha

$$P_{A_0}(T) = \begin{vmatrix} k-T & 2k \\ 2k & 4k-T \end{vmatrix} = T(T-5k)$$

quindi gli autovalori di A_0 sono 0 e $5k$ e gli autovettori normalizzati corrispondenti sono

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1) \text{ e } \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2).$$

Pertanto con l'isometria

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}$$

l'equazione di $\mathcal{C}_k$ diventa (usando ancora X e Y)

$$5kY^2 + \frac{2}{\sqrt{5}}X + \frac{1}{\sqrt{5}}Y = 0$$

da cui con l'isometria

$$\begin{cases} X = X' \\ Y = Y' - \frac{1}{10k\sqrt{5}} \end{cases}$$

l'equazione di $\mathcal{C}_k$ diventa

$$5kY^2 + \frac{2}{\sqrt{5}}X - \frac{1}{100k} = 0$$

e con l'isometria

$$\begin{cases} X = X' + \frac{\sqrt{5}}{200k} \\ Y = Y' \end{cases}$$

l'equazione di $\mathcal{C}_k$ diventa, dividendo per $5k$,

$$Y^2 + \frac{2}{5k\sqrt{5}}X = 0.$$

Se ne deduce che l'equazione canonica euclidea di $\mathcal{C}_k$ è

$$Y^2 - 2\left(\frac{1}{-5k\sqrt{5}}\right)X = 0 \text{ se } k < 0 \text{ e } Y^2 - 2\left(\frac{2}{5k\sqrt{5}}\right)X = 0 \text{ se } k > 0.$$

(c) Affinchè $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ siano affinemente equivalenti, essendo $\mathcal{C}_k$ sempre una parabola non degenere, dovrà esserlo anche $\mathcal{D}_h$, che si vede subito non essere possibile. Pertanto non esistono valori k e di h per cui $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono affinemente equivalenti (nel caso affine) o congruenti (nel caso euclideo). ∎