UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE210 - Geometria 2

a.a. 2018-2019

Prova scritta del 19-9-2019

TESTO

Svolgere tutti gli esercizi.

1. Sia k un numero reale. Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ una sua base.

(a) Mostrare che esiste un'unica forma bilineare simmetrica $b : V \times V \to \mathbb{R}$ tale che

$$b(e_1, e_1) = k, b(e_3, e_3) = -k, b(e_1, e_3) = -k, b(e_2, e_2) = 1, b(e_2, e_3) = -1$$

e che e_1 è perpendicolare a $e_1 - e_2$ rispetto a b.

(b) Calcolare la matrice di b nella forma canonica di Sylvester.

(c) Sia $k = 1$. Sia $F : V \to V$ un operatore tale che $M_e(F) = M_e(b)$ e

$$b(F(v), w) = b(v, w), \text{per ogni } v, w \in V.$$

Mostrare che ogni autovettore di F è isotropo rispetto a b.

(d) Determinare i valori di k per i quali b definisce un prodotto scalare su V e calcolare l'angolo tra e_1 ed $e_1 + e_3$ e il prodotto vettoriale $e_2 \wedge (\frac{1}{\sqrt{-1-k}}(e_2 + e_3))$.

2. Sia K un campo e sia $k \in K$. In $\mathbb{P}^4_K$ con coordinate omogenee $X_0, \ldots, X_4$, consideriamo le seguenti rette:

$$r_1 : \begin{cases} X_1 = 0 \\ X_4 = 0 \\ X_2 + X_3 = 0 \end{cases}, r_2 : \begin{cases} X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \\ X_3 = 0 \end{cases}$$

ed i seguenti piani

$$p_1 : \begin{cases} X_2 = 0 \\ X_4 = 0 \end{cases}, p_2 : \begin{cases} X_1 = 0 \\ X_2 + kX_0 = 0 \end{cases}.$$

(a) Determinare la dimensione di $L(r_1, p_1)$ e di $L(r_2, p_2)$.

(b) Determinare per quali k esiste una proiettività di $\mathbb{P}^4_K$ che manda $L(r_1, p_1)$ in $L(r_2, p_2)$ e quando esiste scriverla esplicitamente in coordinate.

(c) Determinare per quali k esistono $P_1 \in r_1, P_2 \in r_2, Q_1 \in p_1, Q_2 \in p_2$ tali che P_1, P_2, Q_1, Q_2 sono in posizione generale.

3. Siano $k, h \in \mathbb{R}$ e siano $\mathcal{C}_k$ la conica (affine o euclidea) di equazione

$$kX^2 + 4kY^2 + 4kXY + X = 0$$

e $\mathcal{D}_h$ la conica (affine o euclidea) di equazione

$$hX^2 + Y^2 - 1 = 0.$$

(a) Determinare per quali k, h si ha che $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono non degeneri, semplicemente degeneri o doppiamente degeneri e sono (o no) a centro.

(b) Determinare l'equazione canonica euclidea di $\mathcal{C}_k$ per ogni k.

(c) Determinare i valori k e di h per cui $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono affinemente equivalenti (nel caso affine) o congruenti (nel caso euclideo).