UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE210 - Geometria 2

a.a. 2018-2019

Prova scritta del 20-2-2019

TESTO E SOLUZIONI

Svolgere tutti gli esercizi.

1. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 4 con base $\{e_1, \dots, e_4\}$ e siano

$$v_1 = e_1 + e_4, v_2 = e_2 + e_4, v_3 = e_1 + e_3, v_4 = e_2 + e_3 + e_4.$$

Sia $k \in \mathbb{R}$ tale che $k \neq 0$ e sia $b_k : V \times V \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica tale che

$$b_k(v_i, v_i) = 1, 1 \leq i \leq 4, b_k(v_1, v_2) = b_k(v_3, v_4) = k \text{ e } \langle v_3, v_4 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle^{\perp}.$$

(a) Determinare la forma canonica di Sylvester di b_k.

(b) Determinare una matrice $M \in SO(4)$ che diagonalizza b_k.

(c) Determinare i valori di k per i quali b_k ha segnatura $(2, 2)$.

(d) Per i valori di k per i quali b_k definisce un prodotto scalare su V, calcolare $\|v_1 \wedge v_2\|$.

SOLUZIONE:

(a) Osserviamo intanto che $e = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è una base di V in quanto

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Per ipotesi si ha $b(v_i, v_j) = 0$ se $i = 1, 2, j = 3, 4$ quindi

$$M_e(b_k) = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & k & 1 \end{pmatrix}$$

e il polinomio caratteristico è

$$\begin{vmatrix} 1-T & k & 0 & 0 \\ k & 1-T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-T & k \\ 0 & 0 & k & 1-T \end{vmatrix} = [(1-T)^2 - k^2]^2$$

e quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = 1 - |k|, \lambda_2 = 1 + |k|$, entrambi con molteplicità algebrica 2. Come sappiamo $M_e(b_k)$ è diagonalizzabile e sulla diagonale ci andranno gli autovalori. Osservando che $\lambda_2 > 0$ per ogni k, si ha che $\lambda_1 \geq 0$ se e solo se $|k| \leq 1$ e quindi la forma canonica di Sylvester di b_k sarà

$$I_4 \text{ se } -1 < k < 1; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{se } k = \pm 1 \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{se } k < -1 \text{ o } k > 1.$$

In particolare b_k definisce un prodotto scalare su V se e solo se $-1 < k < 1$.
(c) Ne segue inoltre che la segnatura di b_k è $(2, 2)$ se e solo se $k < -1$ o $k > 1$.
(b) Sia λ uno degli autovalori e consideriamo il sistema

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & k & 0 & 0 \\ k & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & k \\ 0 & 0 & k & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = 0$$

ovvero

$$\begin{cases} (1-\lambda)x + ky = 0 \\ kx + (1-\lambda)y = 0 \\ (1-\lambda)z + kw = 0 \\ kz + (1-\lambda)w = 0 \end{cases}$$

che ha le soluzioni $y = \frac{\lambda-1}{k}x, w = \frac{\lambda-1}{k}z$ e pertanto una base ortonormale di autovettori sarà $f = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ dove

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}|k|}(0, 0, k, -|k|), f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}|k|}(k, -|k|, 0, 0), f_3 = \frac{1}{\sqrt{2}|k|}(k, |k|, 0, 0), f_4 = \frac{1}{\sqrt{2}|k|}(0, 0, k, |k|)$$

e quindi

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}|k|} \begin{pmatrix} 0 & k & k & 0 \\ 0 & -|k| & |k| & 0 \\ k & 0 & 0 & k \\ -|k| & 0 & 0 & |k| \end{pmatrix}$$

ovvero

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{se } k > 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{se } k < 0.$$

(d) Sia $-1 < k < 1$. Allora, come è noto,

$$\|v_1 \wedge v_2\| = \sqrt{\|v_1\|^2\|v_2\|^2 - \langle v_1, v_2\rangle^2} = \sqrt{b_k(v_1, v_1)b_k(v_2, v_2) - b_k(v_1, v_2)^2} = \sqrt{1 - k^2}. \blacksquare$$

2. Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}^3$ consideriamo la retta r e il piano p di equazioni

$$r : \begin{cases} X = t+1 \\ Y = t-1 \\ Z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \quad p : X+Y+Z = 1.$$

(a) Determinare le equazioni di tutti i piani p' in $\mathbb{E}^3$ tali che la distanza di p' da r è 2.

(b) Determinare le equazioni di tutte le rette s in $\mathbb{E}^3$ tali che l'angolo tra s ed r e l'angolo tra s e p è $\frac{\pi}{6}$.

(c) Considerato $\mathbb{E}^3 \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ siano $\overline{r}$ la chiusura proiettiva di r e $\overline{p}$ la chiusura proiettiva di p. Determinare le equazioni di tutti i piani p'' di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ tali che $\overline{r}$ e $p'' \cap \overline{p}$ sono incidenti.

SOLUZIONE:

Osserviamo che il vettore di direzione di r è $v_r = (1,1,-1)$.

(a) Sia p' il piano di equazione $AX + BY + CZ + D = 0$ e assumiamo, senza perdita di generalità, $A^2 + B^2 + C^2 = 1$. Per definizione p' deve essere parallelo ad r e quindi $A + B - C = 0$, ovvero $C = A + B$. Preso un qualsiasi punto $P \in r$ si ha allora che $d(p', r) = d(P, p')$. Sia $P = (1, -1, 0)$. Ne segue che

$$2 = d(P, p') = |A - B + D|$$

e quindi $A - B + D = \pm 2$, ovvero $D = -A + B \pm 2$. Imponendo le tre condizioni si trova che $2A^2 + 2B^2 + 2AB = 1$ e pertanto i piani p' sono tutti e soli quelli di equazione

$$AX + BY + (A+B)Z - A + B \pm 2 = 0 \text{ con } 2A^2 + 2B^2 + 2AB = 1.$$

(b) Sia $v_s = (l, m, n)$ un versore di direzione di s. Dunque $l^2 + m^2 + n^2 = 1$. Si ha

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{< v_r, v_s >}{||v_r||||v_s||} = \frac{l+m-n}{\sqrt{3}}$$

e

$$\frac{1}{2} = sen(\frac{\pi}{6}) = \frac{< v_s, (1,1,1) >}{||v_s||||(1,1,1)||} = \frac{l+m+n}{\sqrt{3}}.$$

Dalle tre relazioni deduciamo che

$$(l, m, n) = (\frac{1}{8}(3 + \sqrt{3} \pm \sqrt{6\sqrt{3} - 4}), \frac{1}{8}(- 3 - \sqrt{3} \pm \sqrt{6\sqrt{3} - 4}), \frac{\sqrt{3} - 3}{4})$$

e le possibili equazioni di s sono

$$s : \begin{cases} x = \frac{1}{8}(3 + \sqrt{3} \pm \sqrt{6\sqrt{3} - 4})t + a \\ y = \frac{1}{8}(- 3 - \sqrt{3} \pm \sqrt{6\sqrt{3} - 4})t + b \\ z = \frac{\sqrt{3}-3}{4}t + c \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \text{ per ogni } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

(c) Le equazioni di $\overline{r}$ e $\overline{p}$ sono

$$\overline{r}:\begin{cases} X_1 - X_2 - 2X_0 = 0 \\ X_2 + X_3 + X_0 = 0 \end{cases}, \quad \overline{p}: X_1 + X_2 + X_3 - X_0 = 0.$$

Osserviamo che $\overline{r} \cap \overline{p}$ è un punto: infatti il sistema

$$\begin{cases} X_1 - X_2 - 2X_0 = 0 \\ X_2 + X_3 + X_0 = 0 \\ X_1 + X_2 + X_3 - X_0 = 0 \end{cases}$$

ha, come si verifica facilmente, le soluzioni $X_0 = t, X_1 = 2t, X_2 = 0, X_3 = -t$ e pertanto $\overline{r} \cap \overline{p}$ è il punto $P = [1, 2, 0, -1]$. Ora un piano p'' è tale che $\overline{r}$ e $p'' \cap \overline{p}$ sono incidenti se e solo se $\overline{r} \cap (p'' \cap \overline{p}) \neq \emptyset$ ovvero se e solo se $P \in p''$. Quindi tutti e soli i piani p'' di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ tali che $\overline{r}$ e $p'' \cap \overline{p}$ sono incidenti sono quelli di equazioni $A_0X_0 + A_1X_1 + A_2X_2 + A_3X_3 = 0$ con $A_0 + 2A_1 - A_3 = 0$ ovvero i piani

$$A_0X_0 + A_1X_1 + A_2X_2 + (A_0 + 2A_1)X_3 = 0 \text{ per ogni } A_0, A_1, A_2 \in \mathbb{R}. \blacksquare$$

3. Siano $k, h \in \mathbb{R}$ e siano $\mathcal{C}_k$, la conica (affine o euclidea) di equazione

$$(k+1)X^2 + (k+1)Y^2 + 2kXY + 2X = 1$$

e $\mathcal{D}_h$ la conica (affine o euclidea) di equazione

$$hX^2 - Y^2 - 2X = 0.$$

(a) Determinare per quali k, h si ha che $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono iperboli o parabole.

(b) Determinare un'isometria che trasforma $\mathcal{C}_k$ nella sua equazione canonica euclidea.

(c) Determinare i valori k e di h per cui $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono affinemente equivalenti (nel caso affine) o congruenti (nel caso euclideo).

SOLUZIONE:

(a) La matrice A_0 di $\mathcal{C}_k$ è

$$A_0 = \begin{pmatrix} k+1 & k \\ k & k+1 \end{pmatrix}$$

e si ha $\det A_0 = 2k + 1 \leq 0$ se e solo se $k \leq -\frac{1}{2}$. Quindi

$$\mathcal{C}_k \text{ è iperbole o parabola se e solo se } k \leq -\frac{1}{2}.$$

La matrice B_0 di $\mathcal{D}_h$ è
$$B_0 = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
e si ha $\det B_0 = -h \leq 0$ se e solo se $h \geq 0$. Quindi

$$\mathcal{D}_h \text{ è iperbole o parabola se e solo se } h \geq 0.$$

(b) Diagonalizziamo A_0. Si ha

$$P_{A_0}(T) = \begin{vmatrix} k+1-T & k \\ k & k+1-T \end{vmatrix} = (k+1-T)^2 - k^2$$

quindi gli autovalori di A_0 sono 1 e $2k+1$ e si vede subito che una base ortonormale di autovettori è

$$\{(1,0),(0,1)\} \text{ se } k=0, \{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)\} \text{ se } k \neq 0.$$

Se $k = 0$ con l'isometria
$$\begin{cases} X' = X+1 \\ Y' = Y \end{cases}$$
si ottiene
$$\frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}Y^2 = 1 \quad (C0).$$
Supponiamo ora $k \neq 0$. La prima isometria sarà
$$\begin{cases} X' = \frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y) \\ Y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-X+Y) \end{cases}$$
e l'equazione di $\mathcal{C}_k$ diventa

$$(*) \quad X^2 + (2k+1)Y^2 + \sqrt{2}X + \sqrt{2}Y - 1 = 0.$$

(caso 1): $k = -\frac{1}{2}$
applicando a $(*)$ l'isometria
$$\begin{cases} X' = X - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ Y' = Y \end{cases}$$
si ottiene
$$X^2 + \sqrt{2}Y - \frac{3}{2} = 0$$
da cui, scambiando X ed Y
$$Y^2 + \sqrt{2}X - \frac{3}{2} = 0$$

e applicando l'isometria

$$\begin{cases} X' = -X + \frac{3}{2\sqrt{2}} \\ Y' = Y \end{cases}$$

si ha

$$Y^2 - \sqrt{2}X = 0 \quad (C1).$$

(caso 2): $k \neq -\frac{1}{2}$
applicando a $(*)$ l'isometria

$$\begin{cases} X' = X - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ Y' = Y - \frac{1}{\sqrt{2}(2k+1)} \end{cases}$$

si trova

$$(**) \quad X^2 + (2k+1)Y^2 - \frac{3}{2} - \frac{1}{4k+2} = 0.$$

(caso 3): $k = -\frac{2}{3}$
si ha che $\frac{3}{2} + \frac{1}{4k+2} = 0$ e quindi l'equazione diventa

$$X^2 - \frac{Y^2}{3} = 0$$

ovvero, scambiando X e Y

$$\frac{X^2}{3} - Y^2 = 0 \quad (C2).$$

(caso 4): $k \neq -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}$
da $(**)$ si ottiene

$$\frac{1}{\frac{3}{2} + \frac{1}{4k+2}} X^2 + \frac{2k+1}{\frac{3}{2} + \frac{1}{4k+2}} Y^2 = 1$$

da cui:
(caso 5): $-\frac{2}{3} < k < -\frac{1}{2}$
l'equazione canonica euclidea di $\mathcal{C}_k$ è, scambiando X e Y,

$$\frac{2k+1}{\frac{3}{2} + \frac{1}{4k+2}} X^2 - \frac{1}{-\frac{3}{2} - \frac{1}{4k+2}} Y^2 = 1 \quad (C3);$$

(caso 6): $k > -\frac{1}{2}$
l'equazione canonica euclidea di $\mathcal{C}_k$ è

$$\frac{1}{\frac{3}{2} + \frac{1}{4k+2}} X^2 + \frac{2k+1}{\frac{3}{2} + \frac{1}{4k+2}} Y^2 = 1 \quad (C4)$$

se $k \geq 0$ mentre è
$$\frac{2k+1}{\frac{3}{2}+\frac{1}{4k+2}}X^2 + \frac{1}{\frac{3}{2}+\frac{1}{4k+2}}Y^2 = 1 \quad (C4')$$
se $-\frac{1}{2} < k < 0$.

(caso 7): $k < -\frac{2}{3}$

l'equazione canonica euclidea di $\mathcal{C}_k$ è

$$\frac{1}{\frac{3}{2}+\frac{1}{4k+2}}X^2 - \frac{-2k-1}{\frac{3}{2}+\frac{1}{4k+2}}Y^2 = 1 \quad (C5).$$

(c) Determiniamo l'equazione canonica euclidea di $\mathcal{D}_h$.

Se $h = 0$ si ha, con l'isometria $X' = -X, Y' = Y$,

$$Y^2 - 2X = 0 \quad (D1).$$

Se $h \neq 0$ applicando l'isometria
$$\begin{cases} X' = X + \frac{1}{h} \\ Y' = Y \end{cases}$$
si trova
$$hX^2 - Y^2 - \frac{1}{h} = 0$$
ovvero
$$h^2X^2 - hY^2 = 1$$

e quindi l'equazione canonica euclidea di $\mathcal{D}_h$ è

$$h^2X^2 - hY^2 = 1 \quad (D2)$$

se $h > 0$ mentre è
$$h^2X^2 + (-h)Y^2 = 1 \quad (D3)$$
se $-1 \leq h < 0$ ed è
$$(-h)X^2 + h^2Y^2 = 1 \quad (D4)$$
se $h < -1$.

In base alle equazioni ottenute si vede subito che sono affinemente equivalenti: $(D1)$ e $(C1)$; $(D2), (C3)$ e $(C5)$; $(D3), (D4), (C0), (C4)$ e $(C4')$.

Per la congruenza restano alcuni dei casi precedenti:

- $(D1)$ e $(C1)$ non sono congruenti;

- $(D2)$ e $(C3)$ sono congruenti se e solo se

$$h^2 = \frac{2k+1}{\frac{3}{2} + \frac{1}{4k+2}}, -h = \frac{1}{-\frac{3}{2} - \frac{1}{4k+2}}$$

che si vede essere impossibile;

- $(D2)$ e $(C5)$ sono congruenti se e solo se

$$h^2 = \frac{1}{\frac{3}{2} + \frac{1}{4k+2}}, -h = \frac{-2k-1}{\frac{3}{2} + \frac{1}{4k+2}}$$

se e solo se $k = \frac{-1+\sqrt{3}}{4}, h = \frac{4+2\sqrt{3}}{5+3\sqrt{3}}$;

- $(D3)$ e $(C0)$ non sono congruenti;

- $(D3)$ e $(C4)$ sono congruenti se e solo se

$$h^2 = \frac{1}{\frac{3}{2} + \frac{1}{4k+2}}, -h = \frac{2k+1}{\frac{3}{2} + \frac{1}{4k+2}}$$

se e solo se $k = \frac{-1+\sqrt{3}}{4}, h = -\frac{4+2\sqrt{3}}{5+3\sqrt{3}}$;

- $(D3)$ e $(C4')$ sono congruenti se e solo se

$$h^2 = \frac{-2k-1}{\frac{3}{2} + \frac{1}{4k+2}}, -h = \frac{1}{-\frac{3}{2} - \frac{1}{4k+2}}$$

che si vede essere impossibile;

- $(D4)$ e $(C0)$ non sono congruenti;

- $(D4)$ e $(C4)$ sono congruenti se e solo se

$$-h = \frac{1}{\frac{3}{2} + \frac{1}{4k+2}}, h^2 = \frac{2k+1}{\frac{3}{2} + \frac{1}{4k+2}}$$

che si vede essere impossibile;

- $(D4)$ e $(C4')$ sono congruenti se e solo se

$$-h = \frac{-2k-1}{\frac{3}{2} + \frac{1}{4k+2}}, h^2 = \frac{1}{-\frac{3}{2} - \frac{1}{4k+2}}$$

che si vede essere impossibile. ■