UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Laurea in Matematica
GE210 - Geometria 2
a.a. 2018-2019
Prova scritta del 20-2-2019

TESTO E SOLUZIONI

Svolgere tutti gli esercizi.

1. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 4 con base $\{e_1, \dots, e_4\}$ e siano

$$v_1 = e_1 + e_4, v_2 = e_2 + e_4, v_3 = e_1 + e_3, v_4 = e_2 + e_3 + e_4.$$

Sia $k \in \mathbb{R}$ tale che $k \neq 0$ e sia $b_k : V \times V \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica tale che

$$b_k(v_i, v_i) = 1, 1 \leq i \leq 4, b_k(v_1, v_2) = b_k(v_3, v_4) = k \text{ e } \langle v_3, v_4 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle^{\perp}.$$

(a) Determinare la forma canonica di Sylvester di b_k.
(b) Determinare una matrice $M \in SO(4)$ che diagonalizza b_k.
(c) Determinare i valori di k per i quali b_k ha segnatura $(2, 2)$.
(d) Per i valori di k per i quali b_k definisce un prodotto scalare su V, calcolare $\|v_1 \wedge v_2\|$.

2. Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}^3$ consideriamo la retta r e il piano p di equazioni

$$r : \begin{cases} X = t + 1 \\ Y = t - 1 \\ Z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \quad p : X + Y + Z = 1.$$

(a) Determinare le equazioni di tutti i piani p' in $\mathbb{E}^3$ tali che la distanza di p' da r è 2.
(b) Determinare le equazioni di tutte le rette s in $\mathbb{E}^3$ tali che l'angolo tra s ed r e l'angolo tra s e p è $\frac{\pi}{6}$.
(c) Considerato $\mathbb{E}^3 \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ siano $\overline{r}$ la chiusura proiettiva di r e $\overline{p}$ la chiusura proiettiva di p. Determinare le equazioni di tutti i piani p'' di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ tali che $\overline{r}$ e $p'' \cap \overline{p}$ sono incidenti.

3. Siano $k, h \in \mathbb{R}$ e siano $\mathcal{C}_k$, la conica (affine o euclidea) di equazione

$$(k + 1)X^2 + (k + 1)Y^2 + 2kXY + 2X = 1$$

e $\mathcal{D}_h$ la conica (affine o euclidea) di equazione

$$hX^2 - Y^2 - 2X = 0.$$

(a) Determinare per quali k, h si ha che $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono iperboli o parabole.

(b) Determinare un'isometria che trasforma $\mathcal{C}_k$ nella sua equazione canonica euclidea.

(c) Determinare i valori k e di h per cui $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono affinemente equivalenti (nel caso affine) o congruenti (nel caso euclideo).