UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Laurea in Matematica
GE210 - Geometria 2
a.a. 2018-2019
Prova scritta del 20-6-2019

TESTO E SOLUZIONI

Svolgere tutti gli esercizi.

1. Sia $k \in \mathbb{R}, k \neq 0$ e sia $b_k : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica tale che

$$b_k(E_1, E_1) = b_k(E_3, E_3) = 1, b_k(E_2, E_2) = 2, E_1 \perp E_3,\ E_1 \perp kE_1 - E_2, E_3 \perp kE_3 - E_2$$

dove $\{E_1, E_2, E_3\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.
(a) Determinare la forma canonica di Sylvester di b_k.
(b) Determinare una matrice $M \in SO(3)$ che diagonalizza b_k.
(c) Determinare i valori di k per i quali b_k definisce un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$.
(d) Peri valori di k trovati in (c) calcolare l'angolo tra E_1 ed $E_1 + E_3$ e il prodotto vettoriale $e_1 \wedge e_2$ dove $\{e_1, e_2, e_3\}$ è la base ortonormale che diagonalizza b_k.

SOLUZIONE:

(a) Osserviamo che

$$0 = b_k(E_1, kE_1 - E_2) = k - b_k(E_1, E_2), 0 = b_k(E_3, kE_3 - E_2) = k - b_k(E_3, E_2)$$

da cui $b_k(E_1, E_2) = b_k(E_2, E_3) = k$ e la matrice di b_k è

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 2 & k \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}$$

quindi il suo polinomio caratteristico è

$$\begin{vmatrix} 1-T & k & 0 \\ k & 2-T & k \\ 0 & k & 1-T \end{vmatrix} = (1-T)(T^2 - 3T + 2 - 2k^2)$$

e pertanto gli autovalori sono $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{3+\sqrt{1+8k^2}}{2}$ e $\lambda_3 = \frac{3-\sqrt{1+8k^2}}{2}$. La matrice diagonalizzata sarà

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3+\sqrt{1+8k^2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3-\sqrt{1+8k^2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che $\lambda_2 > 0$ per ogni k mentre $\lambda_3 \geq 0$ se e solo se $-1 \leq k \leq 1$, quindi la forma canonica di Sylvester di b_k sarà

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{se} -1 < k < 1; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{se } k = \pm 1 \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{se } k < -1 \text{ o } k > 1.$$

(c) Ne segue che b_k definisce un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ se e solo se $-1 < k < 1$.
(b) Dato che $k \neq 0$ si ha che $\frac{3 \pm \sqrt{1+8k^2}}{2} \neq 1$ per ogni k, quindi i tre autovalori sono distinti e per diagonalizzare la matrice di b_k basterà trovare tre autovettori corrispondenti. Sia λ uno degli autovalori e consideriamo il sistema

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & k & 0 \\ k & 2-\lambda & k \\ 0 & k & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

ovvero

$$\begin{cases} (1-\lambda)x + ky = 0 \\ kx + (2-\lambda)y + kz = 0 \\ ky + (1-\lambda)z = 0 \end{cases}.$$

Se $\lambda = 1$ si vede subito che una soluzione è $(1, 0, -1)$. Se $\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{1+8k^2}}{2}$ si deduce subito che una soluzione è $(1, \frac{\lambda-1}{k}, 1)$. Dunque una base ortonormale di autovettori sarà $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ dove

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1), e_2 = \frac{1}{\sqrt{2 + (\frac{\lambda_2 - 1}{k})^2}}(1, \frac{\lambda_2 - 1}{k}, 1), e_3 = \frac{1}{\sqrt{2 + (\frac{\lambda_3 - 1}{k})^2}}(1, \frac{\lambda_3 - 1}{k}, 1)$$

e quindi

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2+(\frac{\lambda_2-1}{k})^2}} & \frac{1}{\sqrt{2+(\frac{\lambda_3-1}{k})^2}} \\ 0 & \frac{\lambda_2-1}{k\sqrt{2+(\frac{\lambda_2-1}{k})^2}} & \frac{\lambda_3-1}{k\sqrt{2+(\frac{\lambda_3-1}{k})^2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2+(\frac{\lambda_2-1}{k})^2}} & \frac{1}{\sqrt{2+(\frac{\lambda_3-1}{k})^2}} \end{pmatrix}.$$

(d) Se θ è l'angolo tra E_1 ed $E_1 + E_3$ si ha

$$\cos\theta = \frac{b_k(E_1, E_1 + E_3)}{\sqrt{b_k(E_1, E_1)}\sqrt{b_k(E_1 + E_3, E_1 + E_3)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

da cui $\theta = \frac{\pi}{4}$.
Infine $e_1 \wedge e_2$ ha coordinate, nella base e, i minori 2×2 a segni alterni della matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2+(\frac{\lambda_2-1}{k})^2}} & \frac{\lambda_2-1}{k\sqrt{2+(\frac{\lambda_2-1}{k})^2}} & \frac{1}{\sqrt{2+(\frac{\lambda_2-1}{k})^2}} \end{pmatrix}$$

da cui deduciamo che

$$e_1 \wedge e_2 = \frac{\lambda_2 - 1}{k\sqrt{4 + 2(\frac{\lambda_2-1}{k})^2}} e_1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 + (\frac{\lambda_2-1}{k})^2}} e_2 + \frac{\lambda_2 - 1}{k\sqrt{4 + 2(\frac{\lambda_2-1}{k})^2}} e_3. \blacksquare$$

2. Sia E uno spazio euclideo di dimensione 3 e sia $\{O, i, j, k\}$ un suo sistema di coordinate cartesiane. Siano $P_0 = P_0(1, 0, 0) \in E$, r ed r' le rette di E di equazioni

$$r : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + t \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \quad r' : \begin{cases} X - Y + Z = 0 \\ 2X - Y - Z = 0 \end{cases}.$$

(a) Determinare tutte le rette s che soddisfano tutte e tre le seguenti condizioni: s ha distanza $\frac{2}{\sqrt{3}}$ da r, s passa per il punto $P = P(0, 1, 0)$ ed s forma un angolo di $\frac{\pi}{2}$ con r'.
(b) Determinare tutte le rette s' che soddisfano tutte e tre le seguenti condizioni: s' è perpendicolare ad r, $d(P_0, s') = 2$, s' interseca r nel punto $P' = P'(2, -1, 0)$.
(c) Considerato $E \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ siano $\overline{r}$ e $\overline{r}'$ le chiusure proiettive di r e r'. Determinare (se esistono) le equazioni di tutti i piani p di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ tali che $\overline{r} \subset p$ e $p \cap \overline{r}' = [1, 0, 0, 0]$.

SOLUZIONE:

Osserviamo che i vettori di direzione delle due rette sono, nelle coordinate definite dalla base $\{i, j, k\}$,

$$v_r = (-1, 1, -1), \quad v_{r'} = (2, 3, 1).$$

(a) Sia $v = (l, m, n)$ un versore di direzione di s. Dunque $l^2 + m^2 + n^2 = 1$. Ora

$$0 =< v, v_{r'} >= 2l + 3m + n$$

da cui $n = -2l - 3m$. Se s è parallela ad r (che si vede subito essere equivalente a $m + l = 0$) allora, scelto $Q(2, -1, 0) \in r$, si ha

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = d(s, r) = d(P, r) = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}$$

assurdo. Invece se s non è parallela ad r, e quindi $m + l \neq 0$, si ha

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\left| \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ l & m & n \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ m & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ l & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ l & m \end{vmatrix}^2}}$$

da cui

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2|m+l|}{\sqrt{6(m+l)^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

assurdo. Se ne deduce che s non esiste per nessun k.

(b) Sia $v = (l, m, n)$ un versore di direzione di s'. Dunque $l^2 + m^2 + n^2 = 1$. Ora

$$0 =< v, v_r >= -l + m - n$$

da cui $n = m - l$. Scelto $P' \in s'$, si ha

$$2 = d(P_0, s') = \sqrt{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ m & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ l & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ l & m \end{vmatrix}^2}$$

da cui, sostituendo $n = m - l$ e quadrando si ottiene, $3m^2 + 3l^2 - 2ml = 4$, che, insieme a $l^2 + m^2 + (m-l)^2 = 1$ da

$$\begin{cases} 3m^2 + 3l^2 - 2ml = 4 \\ 2l^2 + 2m^2 - 2ml = 1 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} 2ml = 2l^2 + 2m^2 - 1 \\ m^2 = 3 - l^2 \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} m^2 = 3 - l^2 \\ 2ml = 5 \end{cases}$$

e pertanto $l \neq 0, m = \frac{5}{2l}$ e $4l^4 - 12l^2 + 25 = 0$ che non ha soluzioni reali. Se ne deduce che s' non esiste per nessun k.

(c) Le equazioni cartesiane di r sono

$$\begin{cases} X + Y - 1 = 0 \\ X - Z - 2 = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\overline{r} : \begin{cases} X_1 + X_2 - X_0 = 0 \\ X_1 - X_3 - 2X_0 = 0 \end{cases}$$

mentre

$$\overline{r}' : \begin{cases} X_1 - X_2 + X_3 = 0 \\ 2X_1 - X_2 - X_3 = 0 \end{cases}.$$

Un piano p contenente $\overline{r}$ ha equazione $\alpha(X_1 + X_2 - X_0) + \beta(X_1 - X_3 - 2X_0) = 0$, per $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. Dato che $[1, 0, 0, 0] \in p$ si ha $-\alpha - 2\beta = 0$ e quindi $\alpha = -2\beta$ e l'equazione di p è, dividendo per β,

$$X_1 + 2X_2 + X_3 = 0.$$

Ora sarà sufficiente verificare che p non contiene $\overline{r}'$. Ma è facile vedere che $[0,2,3,1] \in \overline{r}'$ e $[0,2,3,1] \notin p$. Quindi l'unico piano p di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ tali che $\overline{r} \subset p$ e $p \cap \overline{r}' = [1,0,0,0]$ è quello di equazione

$$X_1 + 2X_2 + X_3 = 0. \blacksquare$$

3. Siano $k, h \in \mathbb{R}$ e siano $\mathcal{C}_k$ la conica proiettiva reale di equazione

$$X_0^2 + 4X_1X_2 + kX_2^2 = 0$$

e $\mathcal{D}_h$ la conica proiettiva reale di equazione

$$X_0^2 + hX_1^2 + X_2^2 = 0.$$

(a) Determinare per quali k, h si ha che $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono non degeneri (distinguere se a punti reali o no), semplicemente degeneri o doppiamente degeneri.
(b) Determinare una proiettività che trasforma $\mathcal{C}_k$ nella sua equazione canonica.
(c) Sia H_0 la retta di equazione $X_0 = 0$ e consideriamo l'inclusione $j_0 : \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} - H_0$ data da $j_0(x,y) = [1,x,y]$. Considerate le coniche affini $\mathcal{C}_k \cap (\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} - H_0)$ e $\mathcal{D}_h \cap (\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} - H_0)$, determinare, se esistono, i valori di k e di h per cui esse sono affinemente equivalenti.

SOLUZIONE:

(a) e (b) Si vede subito che l'equazione canonica di $\mathcal{D}_h$ è (eventualmente scambiando X_1 e X_2)

$$X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 = 0 \text{ se } h > 0, X_0^2 + X_1^2 = 0 \text{ se } h = 0, X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 = 0 \text{ se } h < 0.$$

In particolare deduciamo che $\mathcal{D}_h$ è non degenere e a punti non reali se $h > 0$, semplicemente degenere con un solo punto reale se $h = 0$ e non degenere e a punti reali se $h < 0$.
La matrice di $\mathcal{C}_k$ è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & k \end{pmatrix}$$

quindi il suo polinomio caratteristico è

$$\begin{vmatrix} 1-T & 0 & 0 \\ 0 & -T & 2 \\ 0 & 2 & k-T \end{vmatrix} = (1-T)(T^2 - kT - 4)$$

e pertanto gli autovalori sono $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{k+\sqrt{k^2+16}}{2}$ e $\lambda_3 = \frac{k-\sqrt{k^2+16}}{2}$. Ora si vede subito che $\lambda_2 > 0$ e $\lambda_3 < 0$ per ogni k, quindi l'equazione canonica di $\mathcal{C}_k$ è

$$X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 = 0.$$

In particolare deduciamo che $\mathcal{C}_k$ è non degenere e a punti reali per ogni k.
Sia λ uno degli autovalori e consideriamo il sistema

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2 & k-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

ovvero

$$\begin{cases} (1-\lambda)x = 0 \\ -\lambda y + 2z = 0 \\ 2y + (k-\lambda)z = 0 \end{cases} .$$

Se $\lambda = 1$ si vede subito che una base dello spazio delle soluzioni è $\{(1,0,0)\}$ se $k \neq -3$ e $\{(1,0,0),(0,2,1)\}$ se $k=-3$.
Se $\lambda = \lambda_3$ o $\lambda = \lambda_2$ e $k \neq -3$, si deduce subito che una base dello spazio delle soluzioni è $\{(0,1,\frac{\lambda}{2})\}$. Dunque una proiettività che trasforma $\mathcal{C}_k$ nella sua equazione canonica sarà data da

$$^t(X_0, X_1, X_2) = M\ ^t(X_0', \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}X_1', \frac{1}{\sqrt{-\lambda_3}}X_2')$$

dove

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\lambda_3}{2})^2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\lambda_3}{2\sqrt{1+(\frac{\lambda_3}{2})^2}} \end{pmatrix} \text{ se } k=-3, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\lambda_2}{2})^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\lambda_3}{2})^2}} \\ 0 & \frac{\lambda_2}{2\sqrt{1+(\frac{\lambda_3}{2})^2}} & \frac{\lambda_3}{2\sqrt{1+(\frac{\lambda_3}{2})^2}} \end{pmatrix} \text{ se } k \neq -3.$$

(c) Posto $X_0 = 1, X_1 = X, X_2 = Y$ nelle equazioni canoniche proiettive si ottiene (eventualmente scambiando X e Y) che l'equazione canonica affine di $\mathcal{D}_h$ è:
- $X^2 + Y^2 = -1$ se $h > 0$;
- $Y^2 = -1$ se $h = 0$;
- $X^2 - Y^2 = 1$ se $h < 0$.

Analogamente l'equazione canonica affine di $\mathcal{C}_k$ è:
- $X^2 - Y^2 = 1$.

Se ne deduce che $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono affinemente equivalenti se e solo se $h < 0$ (per ogni k). ∎