**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE**

**Corso di Laurea in Matematica**

**GE210 - Geometria 2**

**a.a. 2018-2019**

**Prova scritta del 20-6-2019**

**TESTO E SOLUZIONI**

Svolgere tutti gli esercizi.

**1.** Sia $k \in \mathbb{R}, k \neq 0$ e sia $b_k : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica tale che

$$b_k(E_1, E_1) = b_k(E_3, E_3) = 1, b_k(E_2, E_2) = 2, E_1 \perp E_3,\ E_1 \perp kE_1 - E_2, E_3 \perp kE_3 - E_2$$

dove $\{E_1, E_2, E_3\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(a) Determinare la forma canonica di Sylvester di $b_k$.

(b) Determinare una matrice $M \in SO(3)$ che diagonalizza $b_k$.

(c) Determinare i valori di $k$ per i quali $b_k$ definisce un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$.

(d) Peri valori di $k$ trovati in (c) calcolare l'angolo tra $E_1$ ed $E_1 + E_3$ e il prodotto vettoriale $e_1 \wedge e_2$ dove $\{e_1, e_2, e_3\}$ è la base ortonormale che diagonalizza $b_k$.

**2.** Sia $E$ uno spazio euclideo di dimensione 3 e sia $\{O, i, j, k\}$ un suo sistema di coordinate cartesiane. Siano $P_0 = P_0(1, 0, 0) \in E$, $r$ ed $r'$ le rette di $E$ di equazioni

$$r : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + t \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \quad r' : \begin{cases} X - Y + Z = 0 \\ 2X - Y - Z = 0 \end{cases}.$$

(a) Determinare tutte le rette $s$ che soddisfano tutte e tre le seguenti condizioni: $s$ ha distanza $\frac{2}{\sqrt{3}}$ da $r$, $s$ passa per il punto $P = P(0, 1, 0)$ ed $s$ forma un angolo di $\frac{\pi}{2}$ con $r'$.

(b) Determinare tutte le rette $s'$ che soddisfano tutte e tre le seguenti condizioni: $s'$ è perpendicolare ad $r$, $d(P_0, s') = 2$, $s'$ interseca $r$ nel punto $P' = P'(2, -1, 0)$.

(c) Considerato $E \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ siano $\overline{r}$ e $\overline{r}'$ le chiusure proiettive di $r$ e $r'$. Determinare (se esistono) le equazioni di tutti i piani $p$ di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ tali che $\overline{r} \subset p$ e $p \cap \overline{r}' = [1, 0, 0, 0]$.

**3.** Siano $k, h \in \mathbb{R}$ e siano $\mathcal{C}_k$ la conica proiettiva reale di equazione

$$X_0^2 + 4X_1X_2 + kX_2^2 = 0$$

e $\mathcal{D}_h$ la conica proiettiva reale di equazione

$$X_0^2 + hX_1^2 + X_2^2 = 0.$$

(a) Determinare per quali $k, h$ si ha che $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono non degeneri (distinguere se a punti reali o no), semplicemente degeneri o doppiamente degeneri.
(b) Determinare una proiettività che trasforma $\mathcal{C}_k$ nella sua equazione canonica.
(c) Sia $H_0$ la retta di equazione $X_0 = 0$ e consideriamo l'inclusione $j_0 : \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} \to I\!P^2_{\mathbb{R}} - H_0$ data da $j_0(x, y) = [1, x, y]$. Considerate le coniche affini $\mathcal{C}_k \cap (I\!P^2_{\mathbb{R}} - H_0)$ e $\mathcal{D}_h \cap (I\!P^2_{\mathbb{R}} - H_0)$, determinare, se esistono, i valori di $k$ e di $h$ per cui esse sono affinemente equivalenti.