UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE210 - Geometria 2

a.a. 2018-2019

Prova scritta del 22-1-2019

TESTO E SOLUZIONI

Svolgere tutti gli esercizi.

1. Sia $k \in \mathbb{R}$ tale che $k > 0, k \neq \frac{1}{4}$ e sia $b_k : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica avente come matrice associata

$$A_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & k \\ 0 & k & 0 \\ k & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica $\{E_1, E_2, E_3\}$ di $\mathbb{R}^3$.

(a) Determinare la forma canonica di Sylvester di b_k.

(b) Determinare una matrice $M \in SO(3)$ che diagonalizza b_k.

(c) Determinare i valori di k per i quali b_k definisce un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$.

(d) Per i valori di k trovati in (c) calcolare l'angolo tra E_1 ed E_2 e il prodotto vettoriale $E_1 \wedge E_2$.

SOLUZIONE:

(b) Il polinomio caratteristico di A_k è

$$P_{A_k}(T) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - T & 0 & k \\ 0 & k - T & 0 \\ k & 0 & \frac{1}{2} - T \end{vmatrix} = (\frac{1}{2} - T)^2(k-T) - k^2(k-T) = (k-T)(T^2 - T + \frac{1}{4} - k^2)$$

e quindi gli autovalori di A_k sono $\lambda_1 = k, \lambda_2 = \frac{1}{2} - k, \lambda_3 = \frac{1}{2} + k$. Dato che $k > 0, k \neq \frac{1}{4}$ i tre autovalori sono distinti quindi per diagonalizzare A_k basterà trovare tre autovettori corrispondenti. Sia λ uno degli autovalori e consideriamo il sistema

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & 0 & k \\ 0 & k - \lambda & 0 \\ k & 0 & \frac{1}{2} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

ovvero

$$\begin{cases} (\frac{1}{2} - \lambda)x + kz = 0 \\ (k - \lambda)y = 0 \\ kx + (\frac{1}{2} - \lambda)z = 0 \end{cases} .$$

Se $\lambda = k$ si vede subito che una soluzione è $(0,1,0)$. Se $\lambda = \frac{1}{2} \pm k$ si deduce subito che $y = 0$ e che $z = \pm x$ da cui le altre soluzioni sono $(1,0,\pm 1)$. Dunque una base ortonormale di autovettori sarà $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ dove

$$e_1 = (0,1,0) = E_2, e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)\}$$

e quindi

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

(a) La matrice A_k diagonalizzata sarà

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}+k & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}-k \end{pmatrix}.$$

Notiamo che $k > 0$ e $\frac{1}{2} + k > 0$ mentre $\frac{1}{2} - k \geq 0$ se e solo se $k \leq \frac{1}{2}$. Pertanto la forma canonica di Sylvester di b_k sarà

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ se } k < \frac{1}{2}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ se } k = \frac{1}{2} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ se } k > \frac{1}{2}.$$

(c) Per quanto sopra si deduce che b_k definisce un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ se e solo se $0 < k < \frac{1}{2}, k \neq \frac{1}{4}$.

(d) Supponiamo ora $0 < k < \frac{1}{2}, k \neq \frac{1}{4}$. Per calcolare l'angolo tra E_1 ed E_2 e il prodotto vettoriale $E_1 \wedge E_2$ conviene mettersi nella nuova base e. Ora E_2 ha coordinate $(1,0,0)$ nella base e mentre si vede subito che le coordinate di E_1 nella base e sono $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Ma allora $b_k(E_1, E_2) = (1,0,0) \cdot (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = 0$ e quindi l'angolo tra E_1 ed E_2 è $\frac{\pi}{2}$. Invece $E_1 \wedge E_2$ ha coordinate, nella base e, i minori 2×2 a segni alterni della matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui deduciamo che

$$E_1 \wedge E_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} e_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} e_3 = (0,0,1) = E_3. \blacksquare$$

2. Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}^3$ consideriamo le rette di equazioni

$$r : \begin{cases} Y - Z + 1 = 0 \\ Z - 2Y + 1 = 0 \end{cases}, \quad s_k : \begin{cases} Y - Z = 0 \\ Y + kZ + 1 = 0 \end{cases}.$$

(a) Determinare la distanza di r da s_k.

(b) Esiste un punto $P \in s_0$ tale che la distanza di P da r è 2?

(c) Considerato $\mathbb{E}^3 \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ determinare le equazioni della chiusura proiettiva $\overline{r}$ di r e $\overline{s}_k$ di s_k e verificare se $\overline{r}$ ed $\overline{s}_k$ sono incidenti o sghembe.

SOLUZIONE:

(a) Un vettore di direzione di r è, risolvendo il sistema omogeneo, $v_r = (1, 0, 0)$ mentre un punto di r è, risolvendo il sistema, $P_r = (0, 2, 3)$. Osserviamo intanto che affinchè s_k sia una retta deve essere $k \neq -1$. Un vettore di direzione di s_k è, risolvendo il sistema omogeneo, $v_{s_k} = (1, 0, 0)$, mentre un punto di s_k è, risolvendo il sistema, $P_{s_k} = (0, -\frac{1}{1+k}, -\frac{1}{1+k})$. Essendo r e s_k sono parallele si ha che

$$d(r, s_k) = d(P_r, s_k) = \frac{\sqrt{(\frac{4+3k}{1+k})^2 + (\frac{3+2k}{1+k})^2}}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{\sqrt{13k^2 + 36k + 25}}{|1 + k|}.$$

(b) Dato che le retta sono parallele si ha, per ogni $P \in s_0$, che

$$d(P, r) = d(r, s_0) = 5$$

e quindi non esiste un punto $P \in s_0$ tale che la distanza di P da r è 2.

(c) Sostituendo $X = \frac{X_1}{X_0}, Y = \frac{X_2}{X_0}, Z = \frac{X_3}{X_0}$ ed omogenizzando si ha che

$$\overline{r} : \begin{cases} X_2 - X_3 + X_0 = 0 \\ X_3 - 2X_2 + X_0 = 0 \end{cases}, \quad \overline{s}_k : \begin{cases} X_2 - X_3 = 0 \\ X_2 + kX_3 + X_0 = 0 \end{cases}$$

ed intersecando otteniamo

$$\overline{r} \cap \overline{s}_k : \begin{cases} X_2 - X_3 + X_0 = 0 \\ X_3 - 2X_2 + X_0 = 0 \\ X_2 - X_3 = 0 \\ X_2 + kX_3 + X_0 = 0 \end{cases}$$

ovvero che il punto di intersezione è $[0, 1, 0, 0]$. Quindi $\overline{r}$ ed $\overline{s}_k$ sono incidenti. ■

3. Siano $k, h \in \mathbb{R}$ e siano $\mathcal{C}_k$, la conica (affine o euclidea) di equazione

$$X^2 + k(Y^2 + 2Y + 1) + X(Y + 1) = 1$$

e $\mathcal{D}_h$ la conica (affine o euclidea) di equazione

$$X^2 + hY^2 = -1.$$

(a) Determinare per quali k, h si ha che $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono non degeneri, semplicemente degeneri o doppiamente degeneri e sono (o no) a centro.
(b) Determinare un'isometria che trasforma $\mathcal{C}_k$ nella sua equazione canonica euclidea.
(c) Determinare, se esistono, i valori di k e di h per cui $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono affinemente equivalenti ma non congruenti.

SOLUZIONE:

Osserviamo preliminarmente che l'equazione di $\mathcal{C}_k$ si scrive anche come

$$X^2 + k(Y+1)^2 + X(Y+1) = 1$$

e quindi, con il cambio di coordinate (che è un'isometria)

$$(*) \begin{cases} X' = X \\ Y' = Y + 1 \end{cases}$$

diventa

$$(X')^2 + k(Y')^2 + X'Y' = 1$$

ovvero, ritornando a (X, Y), $\mathcal{C}_k$ è congruente a

$$\mathcal{C}'_k : X^2 + kY^2 + XY = 1.$$

Sarà ora sufficiente studiare $\mathcal{C}'_k$.
(a) La matrice di $\mathcal{C}'_k$ è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & k \end{pmatrix}$$

e si ha $\det A = \frac{1}{4} - k = 0$ se e solo se $k = \frac{1}{4}$ e $r(A) = \begin{cases} 3 & \text{se } k \neq \frac{1}{4} \\ 2 & \text{se } k = \frac{1}{4} \end{cases}$ e pertanto

$$\mathcal{C}_k \text{ è non degenere se } \; k \neq \frac{1}{4}, \text{ semplicemente degenere se } \; k = \frac{1}{4}.$$

Invece

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & k \end{pmatrix}$$

e si ha $\det A_0 = k - \frac{1}{4} = 0$ se e solo se $k = \frac{1}{4}$ e pertanto

$$\mathcal{C}_k \text{ è a centro se e solo se } k \neq \frac{1}{4}.$$

La matrice di $\mathcal{D}_h$ è

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}$$

e si ha $\det B = h = 0$ se e solo se $h = 0$ e $r(B) = \begin{cases} 3 & \text{se } h \neq 0 \\ 2 & \text{se } h = 0 \end{cases}$ da cui

$$\mathcal{D}_h \text{ è non degenere se } \ h \neq 0, \text{ semplicemente degenere se } \ h = 0.$$

Inoltre

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}$$

e si ha $\det B_0 = h$ e pertanto

$$\mathcal{D}_h \text{ è a centro se e solo se } h \neq 0.$$

(b) Diagonalizziamo A_0. Si ha

$$P_{A_0}(T) = \begin{vmatrix} 1-T & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & k-T \end{vmatrix} = T^2 - (k+1)T + k - \frac{1}{4}$$

quindi, osservando che $k^2 - 2k + 2 > 0$ per ogni k, gli autovalori di A_0 sono

$$\lambda_1 = \frac{1 + k - \sqrt{k^2 - 2k + 2}}{2} \text{ e } \lambda_2 = \frac{1 + k + \sqrt{k^2 - 2k + 2}}{2}.$$

Sia λ uno degli autovalori e consideriamo il sistema

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & k-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

ovvero

$$\begin{cases} (1-\lambda)x + \frac{1}{2}y = 0 \\ \frac{1}{2}x + (k-\lambda)y = 0 \end{cases}.$$

Dato che la matrice dei coefficienti ha necessariamente rango 1 (essendo λ uno degli autovalori), basta scegliere un'equazione, per esempio $(1-\lambda)x + \frac{1}{2}y = 0$. Ne deduciamo che due autovettori indipendenti saranno $(1, 2\lambda_1 - 2)$ e $(1, 2\lambda_2 - 2)$ e quindi una base ortonormale di autovettori sarà

$$\{\frac{1}{\sqrt{4\lambda_1^2 - 8\lambda_1 + 5}}(1, 2\lambda_1 - 2), \frac{1}{\sqrt{4\lambda_2^2 - 8\lambda_2 + 5}}(1, 2\lambda_2 - 2)\}$$

e quindi l'isometria cercata è data dalla composizione di (∗) con l'isometria definita dalla matrice

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{4\lambda_1^2-8\lambda_1+5}} & \frac{1}{\sqrt{4\lambda_2^2-8\lambda_2+5}} \\ \frac{2\lambda_1-2}{\sqrt{4\lambda_1^2-8\lambda_1+5}} & \frac{2\lambda_2-2}{\sqrt{4\lambda_2^2-8\lambda_2+5}} \end{pmatrix}.$$

(c) Diagonalizzando $\mathcal{C}'_k$ si ottiene

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 - 1 = 0.$$

Ora osserviamo che $\lambda_2 > 0$ per ogni k mentre $\lambda_1 \geq 0$ se e solo se $k \geq \frac{1}{4}$, da cui l'equazione canonica affine di $\mathcal{C}_k$ è:

- $X^2 - Y^2 - 1 = 0$ se $k < \frac{1}{4}$;
- $Y^2 - 1 = 0$ se $k = \frac{1}{4}$;
- $X^2 + Y^2 - 1 = 0$ se $k > \frac{1}{4}$.

Invece l'equazione canonica affine di $\mathcal{D}_h$ è:

- $X^2 - Y^2 - 1 = 0$ se $h < 0$;
- $Y^2 + 1 = 0$ se $h = 0$;
- $X^2 + Y^2 + 1 = 0$ se $h > 0$.

Affinchè $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ siano affinemente equivalenti dovrà essere quindi $k < \frac{1}{4}$ e $h < 0$. Per tali valori l'equazione canonica euclidea di $\mathcal{C}_k$ è, scambiando X e Y,

$$\lambda_2 X^2 - (-\lambda_1) Y^2 - 1 = 0$$

mentre quella di $\mathcal{D}_h$ è, scambiando X e Y,

$$(-h) X^2 - Y^2 - 1 = 0.$$

Quindi $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono congruenti se e solo se

$$\lambda_2 = -h \text{ e } -\lambda_1 = 1$$

ovvero se e solo se

$$k = -\frac{7}{8} \text{ e } 8h^2 - 5h - 9 = 0$$

e pertanto $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono affinemente equivalenti ma non congruenti se e solo se

$$k < \frac{1}{4}, h < 0 \text{ e } k \neq -\frac{7}{8} \text{ o } h \neq \frac{5 \pm \sqrt{313}}{16}. \blacksquare$$