UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE210 - Geometria 2

a.a. 2018-2019

Prova scritta del 22-1-2019

TESTO

Svolgere tutti gli esercizi.

1. Sia $k \in \mathbb{R}$ tale che $k > 0, k \neq \frac{1}{4}$ e sia $b_k : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica avente come matrice associata

$$A_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & k \\ 0 & k & 0 \\ k & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica $\{E_1, E_2, E_3\}$ di $\mathbb{R}^3$.

(a) Determinare la forma canonica di Sylvester di b_k.

(b) Determinare una matrice $M \in SO(3)$ che diagonalizza b_k.

(c) Determinare i valori di k per i quali b_k definisce un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$.

(d) Per i valori di k trovati in (c) calcolare l'angolo tra E_1 ed E_2 e il prodotto vettoriale $E_1 \wedge E_2$.

2. Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}^3$ consideriamo le rette di equazioni

$$r : \begin{cases} Y - Z + 1 = 0 \\ Z - 2Y + 1 = 0 \end{cases}, \quad s_k : \begin{cases} Y - Z = 0 \\ Y + kZ + 1 = 0 \end{cases}.$$

(a) Determinare la distanza di r da s_k.

(b) Esiste un punto $P \in s_0$ tale che la distanza di P da r è 2?

(c) Considerato $\mathbb{E}^3 \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ determinare le equazioni della chiusura proiettiva $\overline{r}$ di r e $\overline{s}_k$ di s_k e verificare se $\overline{r}$ ed $\overline{s}_k$ sono incidenti o sghembe.

3. Siano $k, h \in \mathbb{R}$ e siano $\mathcal{C}_k$, la conica (affine o euclidea) di equazione

$$X^2 + k(Y^2 + 2Y + 1) + X(Y + 1) = 1$$

e $\mathcal{D}_h$ la conica (affine o euclidea) di equazione

$$X^2 + hY^2 = -1.$$

(a) Determinare per quali k, h si ha che $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono non degeneri, semplicemente degeneri o doppiamente degeneri e sono (o no) a centro.

(b) Determinare un'isometria che trasforma $\mathcal{C}_k$ nella sua equazione canonica euclidea.

(c) Determinare, se esistono, i valori di k e di h per cui $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono affinemente equivalenti ma non congruenti.