UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE210 - Geometria 2

a.a. 2018-2019

Prima prova di esonero

TESTO E SOLUZIONI

1. Sia $k \geq 0$ un numero reale. Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ una sua base.

(a) Mostrare che esiste un'unica forma bilineare simmetrica $b : V \times V \to \mathbb{R}$ tale che

$$b(e_1, e_1) = k^2, b(e_1, e_2) = k, b(e_1, e_3) = -k, b(e_2, e_2) = k, b(e_2, e_3) = -1$$

e che e_3 è perpendicolare a $e_3 - 2e_2$ rispetto a b.

(b) Calcolare la matrice di b nella forma canonica di Sylvester.

(c) Sia $k = 2$. Sia $F : V \to V$ un operatore tale che $M_e(F) = M_e(b)$ e

$$b(F(v), F(w)) = b(v, w), \text{per ogni } v, w \in V.$$

Mostrare che ogni autovettore di F è isotropo rispetto a b.

SOLUZIONE:

(a) Per ipotesi abbiamo $b(e_3, e_3 - 2e_2) = 0$, da cui $b(e_3, e_3) - 2b(e_3, e_2) = 0$, quindi $b(e_3, e_3) = -2$ e questo definisce univocamente una forma bilineare simmetrica b su V tale che

$$M_e(b) = \begin{pmatrix} k^2 & k & -k \\ k & k & -1 \\ -k & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(b) Si ha $b(e_3, e_3) = -2$, quindi e_3 non è isotropo. Inoltre sappiamo che $v = e_3 - 2e_2$ è perpendicolare a e_3 rispetto a b. Si ottiene

$$b(v, v) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k^2 & k & -k \\ k & k & -1 \\ -k & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 4k + 2 > 0.$$

Deduciamo pertanto che la forma canonica di Sylvester di b avrà un 1 e un -1. Per il terzo valore osserviamo che il segno del determinante si conserva tra matrici congruenti. Si ha

$$\det(M_e(b)) = \begin{vmatrix} k^2 & k & -k \\ k & k & -1 \\ -k & -1 & -2 \end{vmatrix} = -3(k-1)k^2$$

da cui si deduce che la forma canonica di Sylvester di b è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ se } k = 0, 1; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ se } 0 < k < 1 \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ se } k > 1.$$

(c) Sia v un autovettore di F con autovalore λ e supponiamo che $b(v, v) \neq 0$. Si ha

$$\lambda^2 b(v, v) = b(F(v), F(v)) = b(v, v)$$

da cui $\lambda = \pm 1$. Ma il polinomio caratteristico di F è

$$P_F(T) = \begin{vmatrix} 4-T & 2 & -2 \\ 2 & 2-T & -1 \\ -2 & -1 & -2-T \end{vmatrix} = -T^3 + 4T^2 + 13T - 12$$

e si vede subito che $P_F(\pm 1) \neq 0$, contraddizione. Dunque v è isotropo. ■

2. Sia $k \in \mathbb{R}$, sia $V = \mathbb{R}^3$ e $E = \{E_1, E_2, E_3\}$ la sua base canonica. Siano

$$v = (1, 1, 1), u = (1, 0, 1) \in V$$

e sia $b : V \times V \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica tale che

$$M_E(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & k & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare per quali k si ha che b definisce un prodotto scalare su V.

Considerato ora V come spazio vettoriale euclideo con il prodotto scalare trovato in a):

(b) Trovare una base ortogonale di V che contiene v.

(c) Calcolare $v \wedge u$.

SOLUZIONE:

(a) La forma quadratica associata a b è

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_3 + kx_2^2 + 5x_3^2 = (x_1 + 2x_3)^2 + kx_2^2 + x_3^2$$

da cui si ottiene che b definisce un prodotto scalare su V se e solo se $k > 0$.

Da ora in poi assumiamo $k > 0$ e facciamo il cambio di coordinate

$$y_1 = x_1 + 2x_3, y_2 = \sqrt{k}x_2, y_3 = x_3,$$

così potremo usare il prodotto standard. Notiamo che, nella nuova base corrispondente a questo cambio di coordinate, in cui lavoreremo, si ha che v ha coordinate $(3, \sqrt{k}, 1)$, E_1 ha coordinate (ancora) $(1, 0, 0)$, E_2 ha coordinate $(0, \sqrt{k}, 0)$ e u ha coordinate $(3, 0, 1)$.

(b) Posto $v_1 = (3, \sqrt{k}, 1), v_2 = (1, 0, 0)$ e $v_3 = (0, \sqrt{k}, 0)$ si ha:

$$w_1 = v_1 = (3, \sqrt{k}, 1),$$

$$w_2 = v_2 - \frac{< v_2, w_1 >}{< w_1, w_1 >} w_1 = (1, 0, 0) - \frac{3}{k+10}(3, \sqrt{k}, 1) = \frac{1}{k+10}(k+1, -3\sqrt{k}, -3)$$

e

$$w_3 = v_3 - \frac{< v_3, w_1 >}{< w_1, w_1 >} w_1 - \frac{< v_3, w_2 >}{< w_2, w_2 >} w_2 =$$

$$= (0, \sqrt{k}, 0) - \frac{k}{k+10}(3, \sqrt{k}, 1) + \frac{3k}{(k+1)(k+10)}(k+1, -3\sqrt{k}, -3) =$$

$$= (0, -\frac{(9k+10)\sqrt{k}}{k+10}, -\frac{k}{k+1}).$$

(c) Basta calcolare i minori 2x2 della matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{k} & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e poi tornare alle vecchie coordinate. Si ha

$$y_1 = \sqrt{k}, y_2 = 0, y_3 = -3\sqrt{k}$$

da cui, risolvendo nelle x_1, x_2, x_3, si ha

$$v \wedge u = (7\sqrt{k}, 0, -3\sqrt{k}). \blacksquare$$

3. Sia E uno spazio euclideo di dimensione 3 e sia $\{O, i, j, k\}$ un suo sistema di coordinate cartesiane. Siano $P_0 = P_0(0, 0, 1) \in E$, r ed r' le rette di E di equazioni

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = t - 1 \\ z = -t + 3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \quad r' : \begin{cases} X - Y = 0 \\ X - Y + Z = 0 \end{cases}.$$

(a) Determinare tutte le rette s che soddisfano tutte e tre le seguenti condizioni: s ha distanza $\frac{1}{\sqrt{2}}$ da r, s interseca r' nel punto $P = P(1, 1, 0)$ ed s forma un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con r'.

(b) Determinare tutte le rette s' che soddisfano tutte e tre le seguenti condizioni: s' è perpendicolare ad r', $d(P_0, s') = 1$, s' interseca r nel punto $P' = P'(1,0,2)$ e s' non è perpendicolare a $j + 2k$.

(c) Determinare tutte le rette s'' che soddisfano tutte e tre le seguenti condizioni: s'' è perpendicolare ad r, incidente r e perpendicolare ad almeno un piano contenente r'.

SOLUZIONE:

Osserviamo che i vettori di direzione delle due rette sono, nelle coordinate definite dalla base $\{i, j, k\}$,

$$v_r = (0, 1, -1), \quad v_{r'} = (-1, -1, 0).$$

(a) Sia $v = (l, m, n)$ un versore di direzione di s. Dunque $l^2 + m^2 + n^2 = 1$. Ora

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{< v, v_{r'} >}{||v||||v_{r'}||} = \frac{-l - m}{\sqrt{2}}$$

da cui $l = -1 - m$. Scelti $P(1,1,0) \in s$ e $Q(1,0,2) \in r$, si ha

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\left| \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ l & m & n \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ m & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ l & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ l & m \end{vmatrix}^2}}$$

da cui

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|-l|}{\sqrt{(n+m)^2 + 2l^2}}$$

e quadrando si ottiene $(n + m)^2 + 2l^2 = 2l^2$, e quindi $n = -m$. Siccome $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, si ha $(-1 - m)^2 + 2m^2 = 1$ e dunque $3m^2 + 2m = 0$ e quindi $m = 0, -\frac{2}{3}$. Ma allora si può prendere $(-1, 0, 0)$ (ovvero $(1, 0, 0)$) o $(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ (ovvero (1,2,-2)) come vettore di direzione di s, e le possibili equazioni di s sono

$$s : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t + 1 \\ z = -2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

(b) Sia $v = (l, m, n)$ un versore di direzione di s'. Dunque $l^2 + m^2 + n^2 = 1$. Ora

$$0 =< v, v_{r'} >= -l - m$$

da cui $l=-m$. Scelto $Q=P'\in s'$, si ha

$$1=d(P_0,s')=\sqrt{\begin{vmatrix}0 & -1\\ m & n\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}-1 & -1\\ l & n\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}-1 & 0\\ l & m\end{vmatrix}^2}$$

da cui, sostituendo $l=-m$ e quadrando si ottiene, $3m^2+2mn+n^2=1$, che, insieme a $2m^2+n^2=1$ da $n^2=1-2m^2, m(m+2n)=0$. Ma non può essere $m+2n=0$ altrimenti $<v,j+2k>=m+2n=0$. Pertanto $m=0, n=\pm1, l=0$ e le equazioni di s' sono

$$s':\begin{cases}X=1\\ Y=0\end{cases}.$$

(c) Un piano contenente r' ha equazione $\alpha(X-Y)+\beta(X-Y+Z)=0$, per $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$, cioè $(\alpha+\beta)X+(-\alpha-\beta)Y+\beta Z=0$ e dunque prendendo $v''=(\alpha+\beta,-\alpha-\beta,\beta)$ come vettore di direzione di s'' avremo che s'' è perpendicolare ad almeno un piano contenente r'. Inoltre s'' é perpendicolare ad r, da cui

$$0=<v'',(0,1,-1)>=-\alpha-\beta-\beta$$

e quindi $\alpha=-2\beta$ e si trova, $v''=\beta(-1,1,1)$. Essendo $\beta\neq0$ possiamo scegliere $v''=(-1,1,1)$. Scelto un punto $P(1,t-1,-t+3)\in r$ si ottengono, per ogni $t\in\mathbb{R}$, usando u come parametro, le rette

$$s''_t:\begin{cases}x=-u+1\\ y=u+t-1\\ z=u-t+3\end{cases}, u\in\mathbb{R}.\ \blacksquare$$