UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE210 - Geometria 2

a.a. 2018-2019

Prima prova di esonero

TESTO

1. Sia $k \geq 0$ un numero reale. Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ una sua base.

(a) Mostrare che esiste un'unica forma bilineare simmetrica $b : V \times V \to \mathbb{R}$ tale che

$$b(e_1, e_1) = k^2, b(e_1, e_2) = k, b(e_1, e_3) = -k, b(e_2, e_2) = k, b(e_2, e_3) = -1$$

e che e_3 è perpendicolare a $e_3 - 2e_2$ rispetto a b.

(b) Calcolare la matrice di b nella forma canonica di Sylvester.

(c) Sia $k = 2$. Sia $F : V \to V$ un operatore tale che $M_e(F) = M_e(b)$ e

$$b(F(v), F(w)) = b(v, w), \text{per ogni } v, w \in V.$$

Mostrare che ogni autovettore di F è isotropo rispetto a b.

2. Sia $k \in \mathbb{R}$, sia $V = \mathbb{R}^3$ e $E = \{E_1, E_2, E_3\}$ la sua base canonica. Siano

$$v = (1, 1, 1), u = (1, 0, 1) \in V$$

e sia $b : V \times V \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica tale che

$$M_E(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & k & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare per quali k si ha che b definisce un prodotto scalare su V.

Considerato ora V come spazio vettoriale euclideo con il prodotto scalare trovato in a):

(b) Trovare una base ortogonale di V che contiene v.

(c) Calcolare $v \wedge u$.

3. Sia E uno spazio euclideo di dimensione 3 e sia $\{O, i, j, k\}$ un suo sistema di coordinate cartesiane. Siano $P_0 = P_0(0,0,1) \in E$, r ed r' le rette di E di equazioni

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = t - 1 \\ z = -t + 3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \quad r' : \begin{cases} X - Y = 0 \\ X - Y + Z = 0 \end{cases}.$$

(a) Determinare tutte le rette s che soddisfano tutte e tre le seguenti condizioni: s ha distanza $\frac{1}{\sqrt{2}}$ da r, s interseca r' nel punto $P = P(1,1,0)$ ed s forma un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con r'.
(b) Determinare tutte le rette s' che soddisfano tutte e tre le seguenti condizioni: s' è perpendicolare ad r', $d(P_0, s') = 1$, s' interseca r nel punto $P' = P'(1,0,2)$ e s' non è perpendicolare a $j + 2k$.
(c) Determinare tutte le rette s'' che soddisfano tutte e tre le seguenti condizioni: s'' è perpendicolare ad r, incidente r e perpendicolare ad almeno un piano contenente r'.