GE210 Geometria e algebra lineare 2
A.A. 2018/2019

Prof. Angelo Felice Lopez

1. Forme bilineari e forme quadratiche

Forme bilineari, simmetriche ed antisimmetriche. Esempi: forma bilineare su K^n associata ad una matrice, forma bilineare simmetrica standard su K^n e antisimmetrica standard su K^n, n pari. Applicazioni lineari associate ad una forma bilineare. Matrice di una forma bilineare in una data base. La matrice di una forma bilineare calcola la forma. Corrispondenza biunivoca tra forme bilineari e matrici e tra forme simmetriche (antisimmetriche) e matrici simmetriche (antisimmetriche). Matrici congruenti. Due matrici sono congruenti se e solo se sono le matrici di una forma bilineare in due basi. Il rango di una forma bilineare. Forme bilineari non degeneri e degeneri. Una forma bilineare b su V è non degenere se e solo se per ogni $v \neq 0, v \in V$ esiste $w \in V$ tale che $b(v,w) \neq 0$ se e solo se l'applicazione lineare associata è un isomorfismo. Forme bilineari simmetriche. Ortogonalità. Basi ortogonali. Vettori isotropi. Decomposizione $V = < v > \oplus v^\perp$ se v è non isotropo. Forme quadratiche e loro relazione con le forme bilineari simmetriche. Il polinomio omogeneo associato ad una forma quadratica. Sia K un campo di caratteristica diversa da 2 e sia V uno K-spazio vettoriale di dimensione finita, allora ogni forma bilineare simmetrica su V possiede una base ortogonale. Equivalentemente ogni matrice simmetrica $A \in M_n(K)$ è congruente ad una matrice diagonale. Esempi di matrici simmetriche non congruenti a matrici diagonali se la caratteristica è 2 e di matrici simmetriche non diagonalizzabili. Sia K un campo algebricamente chiuso e sia V uno K-spazio vettoriale di dimensione finita, allora ogni forma bilineare simmetrica su V possiede una base in cui la matrice ha un blocco uguale a $I_r, r = r(b)$ e per il resto è nulla. Equivalentemente ogni matrice simmetrica $A \in M_n(K)$ è congruente ad una matrice con un blocco uguale a $I_r, r = r(A)$ e per il resto nulla. Il teorema di Sylvester. Forme quadratiche definite positive, negative, semidefinite positive, negative e indefinite. L'indice di positività e di negatività e la segnatura di una forma quadratica. Espressione di una forma quadratica in funzione della segnatura. Matrici definite positive.

2. Prodotti scalari, spazi vettoriali euclidei

Prodotti scalari, spazi vettoriali euclidei. Disuguaglianza di Schwartz. La norma di un vettore e le sue proprietà. Versori. Insiemi di vettori ortogonali e ortonormali. Vettori ortogonali sono linearmente indipendenti. Ogni spazio vettoriale euclideo di dimensione finita ammette una base ortonormale. Basi ortonormali e matrici ortogonali.

Ortogonalizzaione. Il coefficiente di Fourier. Il teorema di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt. Se W è un sottospazio di dimensione finita di uno spazio vettoriale euclideo V si ha $V = W \oplus W^{\perp}$. Angolo tra due vettori. Il prodotto vettoriale e le sue proprietà. Il prodotto vettoriale dipende solo dalla scelta di un'orientazione. La lunghezza del prodotto vettoriale in una decomposizione ortogonale. Il prodotto misto. L'identità di Lagrange.

3. Spazi euclidei

Spazi euclidei. Riferimenti cartesiani, cambi di coordinate cartesiane. Distanza tra due punti in uno spazio euclideo. Angolo tra due rette. Geometria nel piano euclideo. Vettori di direzione e vettori normali ad una retta in funzione delle coordinate cartesiane. La retta per un punto ortogonale ad un'altra retta. Distanza di un punto da una retta. Distanza tra due rette parallele. Geometria in uno spazio euclideo di dimensione tre. Vettori e versori normali ad un piano in funzione delle coordinate cartesiane. Angolo convesso tra due piani. Angolo tra una retta e un piano. Distanza di un punto da un piano. Distanza di un punto da una retta. Distanza tra due rette sghembe. La retta perpendicolare a due rette sghembe.

4. Operatori unitari

Operatori unitari. Un operatore è unitario se e solo se rispetta la norma o se, nel caso di dimensione finita, manda basi ortonormali in basi ortonormali, se e solo se manda il vettore nullo nel vettore nullo e rispetta la distanza di v da w nella struttura di spazio affine di V su sé stesso. Il gruppo ortogonale $O(V)$ e il suo isomorfismo con $O(n)$. Il determinante e gli autovalori di un operatore unitario sono ± 1. Un operatore è unitario se e solo se la sua matrice, rispetto ad una base ortonormale, è ortogonale. Il gruppo speciale ortogonale $SO(V)$ e il suo isomorfismo con $SO(n)$. Operatore aggiunto e sua matrice rispetto ad una base ortonormale. Operatori simmetrici e antisimmetrici. Un operatore T è unitario se e solo se ${}^tT \circ T = \mathrm{id}_V$.

5. Affinità ed isometrie

Affinità ed isometrie. Traslazioni. Il gruppo delle isometrie di uno spazio euclideo. Isometrie dirette e inverse. Lo stabilizzatore di un punto. Le rotazioni di uno spazio euclideo. Sia A uno spazio affine su V e sia $O \in A$. C'è un isomorfismo di gruppi tra $\mathrm{Aff}_O(A)$ e $GL(V)$ che, su uno spazio euclideo E, induce isomorfismi tra $\mathrm{Isom}_O(E)$ e $O(V)$ e tra $\mathrm{Rot}_O(E)$ e $SO(V)$. Inoltre, fissata una base ortonormale, è indotto un isomorfismo tra $\mathrm{Isom}_O(E)$ e $O(n)$ e tra $\mathrm{Rot}_O(E)$ e $SO(n)$. Sia E uno spazio euclideo con riferimento cartesiano $\{O, e_1, \ldots, e_n\}$. Sia f un'isometria di E. Allora $f(P(x_1, \ldots, x_n)) = Q(y_1, \ldots, y_n)$ dove $Y = AX + c$ essendo A la matrice nella base e dell'automorfismo associato ad f e c le coordinate di $f(O)$. Viceversa ogni applicazione f che soddisfa la condizione sopra, con $A \in O(n)$, è un'isometria di E. In particolare le isometrie (rispettivamente le isometrie dirette) di $\mathbb{E}^n$ sono le affinità con $A \in O(n)$ (rispettivamente $A \in SO(n)$). Un'applicazione di uno spazio euclideo in sé è un'isometria se e solo se rispetta la distanza. Figure geometriche, proprietà euclidee (cenni). Riflessioni in spazi vettoriali euclidei (rispetto ad un vettore non nullo) e in spazi euclidei (rispetto ad un iperpiano).

6. Diagonalizzazione di operatori simmetrici

Una matrice simmetrica a coefficienti reali ha tutti gli autovalori reali. Il teorema spettrale: ogni operatore simmetrico su uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita possiede una base ortonormale in cui la matrice dell'operatore è diagonale. Ogni matrice simmetrica è simile, tramite una matrice ortogonale, ad una matrice diagonale. Ogni forma quadratica su uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita possiede una base ortonormale diagonalizzante. In uno spazio vettoriale euclideo due autovettori di un operatore simmetrico associati ad autovalori distinti sono ortogonali.

7. Forme hermitiane, spazi vettoriali hermitiani

Forme hermitiane. Forme hermitiane definite positive, negative e semidefinite positive, negative. Matrici hermitiane. Ortogonalità tra vettori rispetto ad una forma hermitiana, basi ortogonali. Diagonalizzazione di forme hermitiane in spazi vettoriali di dimensione finita sui complessi. Prodotto hemitiano, spazi vettoriali hermitiani. La disuguaglianza di Schwartz, la norma di un vettore e le sue proprietà e gli operatori unitari, in spazi vettoriali hermitiani. Gli autovalori di un operatore hermitiano hanno modulo 1. In uno spazio vettoriale hermitiano due autovettori di un operatore unitario associati ad autovalori distinti sono ortogonali. Matrici unitarie, il gruppo unitario. Un operatore su uno spazio vettoriale hermitiano è unitario se e solo se la sua matrice, in una base ortonormale, è unitaria. Ogni operatore unitario su uno spazio vettoriale hermitiano di dimensione $n \geq 1$ possiede una base ortonormale diagonalizzante. Per ogni matrice unitaria A esiste una matrice unitaria M tale che $M^{-1}AM = {}^t\overline{M}AM$ è diagonale. Operatori hermitiani su spazi vettoriali hermitiani. Un operatore su uno spazio vettoriale hermitiano è hermitiano se e solo se la sua matrice, in una base ortonormale, è hermitiana. Un operatore su uno spazio vettoriale hermitiano ha tutti gli autovalori reali.

8. Spazi proiettivi

Spazio proiettivo associato ad un K-spazio vettoriale di dimensione finita. La dimensione di uno spazio proiettivo. Rette proiettive, piani proiettivi, n-spazio proiettivo numerico su un campo K. Riferimenti proiettivi, coordinate omogenee. I punti fondamentali ed il punto unità. Il riferimento proiettivo standard su $\mathbb{P}^n_K$. Sottospazi proiettivi. L'equazione di un iperpiano è un polinomio omogeneo di grado 1. Iperpiani coordinati. Le equazioni di un sottospazio sono un sistema lineare omogeneo. Intersezione di due (o di una famiglia di) sottospazi proiettivi. Sottospazi incidenti e sghembi. Il sottospazio generato da un sottoinsieme di uno spazio proiettivo. Il sottospazio generato da un numero finito di punti e la sua dimensione. Punti linearmente indipendenti e dipendenti. Punti allineati e complanari. Due punti sono linearmente indipendenti se e solo se sono distinti, tre punti sono linearmente indipendenti se e solo se non sono allineati. Punti in posizione generale. L'equazione della retta per due punti distinti in un piano proiettivo e l'equazione del piano per tre punti non allineati in uno spazio proiettivo di dimensione tre. Equazioni parametriche di sottospazi proiettivi. Somma di sottospazi. La somma di $\mathbb{P}(W_1)$ e $\mathbb{P}(W_2)$ è $\mathbb{P}(W_1 + W_2)$. La formula di Grassmann proiettiva. Se S_1 e S_2 sono sottospazi di $\mathbb{P}$ allora $\dim(S_1 \cap S_2) \geq \dim S_1 + \dim S_2 - \dim \mathbb{P}$ e se quest'ultima è non negativa allora $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$. Sottospazi in posizione generale. Il cono proiettante un sottoinsieme da un punto. Proiezione da uno spazio proiettivo in un iperpiano con centro un punto. Proiezione in coordinate. Ipersuperficie proiettive, curve algebriche piane.

9. Geometria affine e geometria proiettiva

La corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} - H_0$ e la retta di equazione $X_0 = 1$ in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$. Punto all'infinito di questa retta. La corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{P}^n_K - H_0$ e l'iperpiano di equazione $X_0 = 1$ in $\mathbb{A}^{n+1}_K$, passaggio da coordinate omogenee a non omogeneee e viceversa. Punti propri e impropri. Geometria affine e geometria proiettiva vista in modo astratto: sia $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo e sia H un iperpiano vettoriale di V. L'applicazione lineare $\varphi_{P,P'}$ associata a due punti $P, P' \in \mathbb{P} - \mathbb{P}(H)$. L'applicazione che associa a (P, P') l'applicazione $\varphi_{P,P'}$ definisce una struttura di spazio affine su $\mathbb{P} - \mathbb{P}(H)$ sullo spazio vettoriale $\mathrm{Hom}(V/H, H)$ e per ogni sottospazio proiettivo $S = \mathbb{P}(W)$ tale che $S \nsubseteq \mathbb{P}(H)$ è definita una struttura di sottospazio affine su $S \cap (\mathbb{P} - \mathbb{P}(H))$ con giacitura $\mathrm{Hom}(V/H, W \cap H)$. Sia A un iperpiano affine in V_a (cioè V come spazio affine su s stesso), sia H la giacitura di A e supponiamo che $0 \notin A$. Allora A definisce una struttura di spazio affine su $\mathbb{P} - \mathbb{P}(H)$ con spazio vettoriale associato H. L'isomorfismo tra A e $\mathbb{P} - \mathbb{P}(H)$.

10. Dualità tra spazi proiettivi

Dualità tra spazi proiettivi. Lo spazio proiettivo duale. L'applicazione di dualità. L'applicazione di dualità è una biiezione. L'applicazione di dualità in coordinate. Riferimenti proiettivi e riferimenti duali. La dualità in coordinate. Sistemi lineari di iperpiani con centro un sottospazio. Il sistema lineare con centro un sottospazio è determinato dalle equazioni del sottospazio. La corrispondenza biunivoca tra i sistemi lineari con centro un sottospazio di dimensione s di $\mathbb{P}^n$ e i sottospazi di dimensione $n - s - 1$ dello spazio proiettivo duale. Affermazioni duali tra punti e iperpiani.

11. Isomorfismi di spazi proiettivi e proiettività

Cambiamenti di coordinate omogenee. Se $e_0, \ldots, e_n$ e $f_0, \ldots, f_n$ sono due riferimenti proiettivi di $\mathbb{P}$, il cambio di coordinate omogenee è dato dalla formula $Y = AX$ dove A è una matrice in $GL_{n+1}(K)$ definita a meno di multipli non nulli. Isomorfismi di spazi proiettivi e proiettività. L'applicazione lineare associata ad una proiettività è definita a meno di multipli non nulli. Il gruppo delle proiettività $PGL(\mathbb{P})$ e il gruppo lineare proiettivo $PGL_{n+1}(K)$. $PGL(\mathbb{P}(V)) \cong GL(V)/\{\lambda \mathrm{id}_V, \lambda \in K^*\}$. Siano $\mathbb{P}$ e $\mathbb{P}'$ due spazi proiettivi di dimensione n. Esiste un unico isomorfismo $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$ che manda $n + 2$ punti in posizione generale in $\mathbb{P}$ in $n + 2$ punti in posizione generale in $\mathbb{P}'$. In particolare ogni proiettività di uno spazio proiettivo di dimensione n che fissa $n+2$ punti in posizione generale è l'identità. Le proiettività definiscono isomorfismi tra sottospazi. Figure proiettive, figure proiettivamente equivalenti, proprietà proiettive (cenni).

12. Curve algebriche piane affini, euclidee e proiettive

Curve algebriche piane affini, euclidee e proiettive. Loro supporto, equazioni e grado. Equivalenza affine, euclidea e proiettiva di curve algebriche piane. La trasformata di una curva tramite un'affinità, un'isometria o una proiettività. Proprietà affini, euclidee o proiettive delle curve algebriche piane. Il grado e la cardinalità del supporto danno proprietà affini, euclidee o proiettive. Chiusura proiettiva di una curva affine, punti propri e impropri. La classificazione delle rette proiettive.

13. Coniche proiettive, affini e euclidee

Coniche proiettive, la loro matrice e il loro rango. Il rango di una conica proiettiva determina una proprietà proiettiva. Coniche non-degeneri, degeneri, semplicemente degeneri e doppiamente degeneri. Il teorema di classificazione delle coniche proiettive su un campo algebricamente chiuso. Supporti di coniche dei tre tipi. Il teorema di classificazione delle coniche proiettive reali. Coniche affini, la loro matrice, il loro rango. Il rango di una conica affine determina una proprietà affine. Coniche affini non-degeneri, degeneri, semplicemente degeneri e doppiamente degeneri. La matrice dei termini di grado massimo di una conica affine, il segno del determinate di tale matrice determina una proprietà affine di una conica affine. Coniche affini a centro e parabole. Ellissi e iperboli. Il teorema di classificazione delle coniche affini su un campo algebricamente chiuso e delle coniche affini reali. Il teorema di classificazione delle coniche euclidee.

Testi consigliati

[1] E. Sernesi, *Geometria I - Seconda edizione*. Bollati Boringhieri, (2000).

Modalità d'esame

- valutazione in itinere ("esoneri")		■ SI	□ NO
- esame finale	scritto	■ SI	□ NO
	orale	■ SI	□ NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)		□ SI	■ NO

Gli studenti che hanno sostenuto con esito positivo, nel corso del semestre, le prove di valutazione parziale ("esoneri") possono accedere direttamente alla prova orale.

Per tutti gli studenti che preferiscono non avvalersi della valutazione ottenuta nelle prove di valutazione parziale, l'esame finale consiste in una prova scritta ed una prova orale.

Gli studenti che hanno sostenuto con esito negativo la prova orale dovranno risostenere la prova scritta.