UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE210 - Geometria 2

a.a. 2018-2019

Seconda prova di esonero

TESTO E SOLUZIONI

1. Sia $k \in \mathbb{C}$. Sia V uno spazio vettoriale hermitiano e sia $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ una sua base ortonormale. Sia

$$A_k = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} k^2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Sia $T \in \mathrm{End}(V)$ tale che la sua matrice nella base e è A_k. Determinare tutti i valori di k per i quali T è un operatore unitario.

Per almeno un valore di k trovato in a):

(b) Determinare una matrice $M \in U(3)$ che diagonalizza T.

(c) Esiste una matrice $M \in O(3)$ che diagonalizza T?

SOLUZIONE:

(a) Dato che la base e è ortonormale, si ha che T è un operatore unitario se e solo se A_k è unitaria, ovvero se e solo se ${}^t\overline{A_k}A_k = I_3$. Ora

$${}^t\overline{A_k}A_k = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} \overline{k}^2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k^2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} \overline{k}^2k^2+8 & 2\overline{k}^2-2 & 2\overline{k}^2-2 \\ 2k^2-2 & 9 & 0 \\ 2k^2-2 & 0 & 9 \end{pmatrix} = I_3$$

se e solo se

$$\begin{cases} \overline{k}^2k^2+8=9 \\ 2\overline{k}^2-2=0 \\ 2k^2-2=0 \end{cases}$$

ovvero se e solo se $k^2 = 1$, cioè $k = \pm 1$.

(b) e (c) Scegliamo $k = 1$. Per trovare $M \in U(3)$ che diagonalizza T cerchiamo una base ortonormale di autovettori. Sia $A = 3A_1$. Si ha

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 2 & 2 \\ 2 & 1-t & -2 \\ -2 & 2 & -1-t \end{vmatrix} = -t^3+t^2-3t+27 = (3-t)(t^2+2t+9)$$

quindi, dividendo per 3, gli autovalori di T sono $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{-1-2\sqrt{2}i}{3}$ e $\lambda_3 = \frac{-1+2\sqrt{2}i}{3}$.
In particolare, non essendo tutti reali, deduciamo subito che non esiste una matrice $M \in O(3)$ che diagonalizza T.
Per trovare $M \in U(3)$ invece risolviamo il sistema $(A - \lambda I_3)X = 0$ dove $\lambda = 3, -1 \pm 2\sqrt{2}i$.
Si ha

$$\begin{cases} (1-\lambda)x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + (1-\lambda)y - 2z = 0 \\ -2x + 2y - (1+\lambda)z = 0 \end{cases}$$

e si vede subito che le sue soluzioni sono $(1,1,0)$ se $\lambda = 3$ e $(1,-1,\pm\sqrt{2}i)$ se $\lambda = 3\lambda_j$, $j = 1, 2$. Dunque una base ortonormale di autovettori sarà

$$\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}i), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}i)\}$$

e quindi

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}i & \frac{\sqrt{2}}{2}i \end{pmatrix}. \blacksquare$$

2. Sia K un campo e sia $k \in K$. In $\mathbb{P}^3_K$ con coordinate omogenee $X_0, \ldots, X_3$, consideriamo le seguenti rette :

$$r_1 : \begin{cases} X_1 = 0 \\ X_2 + X_3 = 0 \end{cases}, r_2 : \begin{cases} X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \end{cases}, s_1 : \begin{cases} X_2 = 0 \\ X_3 = 0 \end{cases}, s_2 : \begin{cases} X_1 = 0 \\ X_2 + kX_0 = 0 \end{cases}.$$

(a) Determinare la dimensione di $L(r_1, r_2)$ e di $L(s_1, s_2)$.
(b) Determinare per quali k esiste una proiettività di $\mathbb{P}^3_K$ che manda $L(r_1, r_2)$ in $L(s_1, s_2)$ e quando esiste scriverla esplicitamente in coordinate.
(c) Determinare per quali k esistono $P_1 \in r_1, P_2 \in r_2, Q_1 \in s_1, Q_2 \in s_2$ tali che P_1, P_2, Q_1, Q_2 sono in posizione generale.

SOLUZIONE:

(a) Si ha

$$r_1 \cap r_2 : \begin{cases} X_1 = 0 \\ X_2 + X_3 = 0 \\ X_2 = 0 \end{cases}$$

quindi $r_1 \cap r_2 = \{[1,0,0,0]\}$ è un punto mentre

$$s_1 \cap s_2 : \begin{cases} X_2 = 0 \\ X_3 = 0 \\ X_1 = 0 \\ X_2 + kX_0 = 0 \end{cases}$$

quindi, se $k = 0$ si ha che $s_1 \cap s_2 = \{[1, 0, 0, 0]\}$ è un punto mentre se $k \neq 0$ si ha che $s_1 \cap s_2 = \emptyset$. Per la formula di Grassmann deduciamo che

$$\dim L(r_1, r_2) = \dim r_1 + \dim r_2 - \dim r_1 \cap r_2 = 2$$

mentre

$$\dim L(s_1, s_2) = \dim s_1 + \dim s_2 - \dim s_1 \cap s_2 = \begin{cases} 2 & \text{se } k = 0 \\ 3 & \text{se } k \neq 0 \end{cases}.$$

(b) Dato che una proiettività conserva la dimensione, se esiste una proiettività di $\mathbb{P}^3_K$ che manda $L(r_1, r_2)$ in $L(s_1, s_2)$ allora deve essere $k = 0$. E, in tal caso, basta osservare che $L(r_1, r_2)$ è il piano di equazione $X_1 = 0$ mentre $L(s_1, s_2)$ è il piano di equazione $X_2 = 0$. Quindi $f(X_0, X_1, X_2, X_3) = (X_0, X_2, X_1, X_3)$ è una proiettività di $\mathbb{P}^3_K$ che manda $L(r_1, r_2)$ in $L(s_1, s_2)$.

(c) I possibili punti sono $P_1 = [a_0, 0, a_2, -a_2], P_2 = [b_0, 0, 0, b_3], Q_1 = [c_0, c_1, 0, 0], Q_2 = [d_0, 0, -kd_0, d_3]$. Dunque per esempio $P_1 = [0, 0, 1, -1], P_2 = [0, 0, 0, 1], Q_1 = [0, 1, 0, 0], Q_2 = [1, 0, -k, 0]$ sono in posizione generale per ogni k. ■

3. Siano $k, h \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$ e siano $\mathcal{C}_k$ la conica (affine o euclidea) di equazione

$$(k + 3)X^2 + kY^2 + 4XY + 1 = 0$$

e $\mathcal{D}_h$ la conica (affine o euclidea) di equazione

$$2XY - 1 + h(X^2 - Y^2) = 0.$$

(a) Determinare per quali k, h si ha che $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono non degeneri, semplicemente degeneri o doppiamente degeneri e sono (o no) a centro.

(b) Determinare l'equazione canonica euclidea di $\mathcal{C}_k$ per ogni $k \neq 0$.

(c) Determinare i valori $k \neq 0$ e di h per cui $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono affinemente equivalenti (nel caso affine) o congruenti (nel caso euclideo).

SOLUZIONE:

(a) La matrice di $\mathcal{C}_k$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k+3 & 2 \\ 0 & 2 & k \end{pmatrix}$$

e si ha $\det A = k^2 + 3k - 4 = 0$ se e solo se $k = -4, 1$. Si vede subito che

$$r(A) = \begin{cases} 3 & \text{se } k \neq -4, 1 \\ 2 & \text{se } k = -4, 1 \end{cases}$$

e pertanto

$$\mathcal{C}_k \text{ è non degenere se } \ k \neq -4, 1, \text{ semplicemente degenere se } \ k = -4, 1.$$

Invece

$$A_0 = \begin{pmatrix} k+3 & 2 \\ 2 & k \end{pmatrix}$$

e si ha $\det A_0 = k^2 + 3k - 4 = 0$ se e solo se $k = -4, 1$ e pertanto

$$\mathcal{C}_k \text{ è a centro se e solo se } k \neq -4, 1.$$

La matrice di $\mathcal{D}_h$ è

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & h & 1 \\ 0 & 1 & -h \end{pmatrix}$$

e si ha $\det B = h^2 + 1$ che ovviamente non si annulla mai e pertanto

$$\mathcal{D}_h \text{ è non degenere per ogni } h.$$

Inoltre

$$B_0 = \begin{pmatrix} h & 1 \\ 1 & -h \end{pmatrix}$$

e si ha $\det B_0 = -h^2 - 1 < 0$ per ogni h e pertanto

$$\mathcal{D}_h \text{ è a centro ed è un'iperbole per ogni } h.$$

(b) Diagonalizziamo A_0. Si ha

$$P_{A_0}(T) = \begin{vmatrix} k+3-T & 2 \\ 2 & k-T \end{vmatrix} = T^2 - (2k+3)T + k^2 + 3k - 4$$

quindi gli autovalori di A_0 sono $k-1$ e $k+4$. Pertanto con un'isometria l'equazione di $\mathcal{C}_k$ diventa

$$(k-1)X^2 + (k+4)Y^2 + 1 = 0.$$

da cui:

(caso 1): $k > 1$

l'equazione canonica euclidea di $\mathcal{C}_k$ è

$$\frac{X^2}{\frac{1}{k-1}} + \frac{Y^2}{\frac{1}{k+4}} = -1;$$

(caso 2): $k = 1$

l'equazione canonica euclidea di $\mathcal{C}_k$ è

$$Y^2 + \frac{1}{5} = 0;$$

(caso 3): $-4 < k < 1$

l'equazione canonica euclidea di $\mathcal{C}_k$ è

$$\frac{X^2}{\frac{1}{1-k}} - \frac{Y^2}{\frac{1}{k+4}} = 1;$$

(caso 4): $k = -4$

l'equazione canonica euclidea di $\mathcal{C}_k$ è (dopo aver scambiato X e Y)

$$Y^2 - \frac{1}{5} = 0;$$

(caso 5): $k < -4$

l'equazione canonica euclidea di $\mathcal{C}_k$ è (dopo aver scambiato X e Y)

$$\frac{X^2}{\frac{1}{-k-4}} + \frac{Y^2}{\frac{1}{1-k}} = 1.$$

(c) Intanto affinchè $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ siano affinemente equivalenti o congruenti, essendo $\mathcal{D}_h$ sempre un'iperbole non degenere, dovrà esserlo anche $\mathcal{C}_k$ e quindi $-4 < k < 1$. Dato che c'è una sola iperbole affine non degenere, questo ci dice che $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono affinemente equivalenti se e solo se $-4 < k < 1$.

Per vedere se possono essere congruenti diagonalizziamo B_0. Si ha

$$P_{B_0}(T) = \begin{vmatrix} h-T & 1 \\ 1 & -h-T \end{vmatrix} = T^2 - (h^2+1)$$

quindi gli autovalori di B_0 sono $\pm\sqrt{h^2+1}$. Pertanto con un'isometria l'equazione di $\mathcal{D}_h$ diventa

$$(\sqrt{h^2+1})X^2 - (\sqrt{h^2+1})Y^2 - 1 = 0$$

e quindi l'equazione canonica euclidea di $\mathcal{D}_h$ è

$$\frac{X^2}{\frac{1}{\sqrt{h^2+1}}} - \frac{Y^2}{\frac{1}{\sqrt{h^2+1}}} = 1.$$

Si ha allora che $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono congruenti se e solo se

$$\frac{1}{1-k} = \frac{1}{\sqrt{h^2+1}} \text{ e } \frac{1}{k+4} = \frac{1}{\sqrt{h^2+1}}$$

e si vede subito che questo vale se e solo se $k = -\frac{3}{2}$ e $h = \pm\frac{\sqrt{21}}{2}$. $\blacksquare$