

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE210 - Geometria 2

a.a. 2018-2019

Seconda prova di esonero

TESTO

1. Sia $k \in \mathbb{C}$. Sia V uno spazio vettoriale hermitiano e sia $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ una sua base ortonormale. Sia

$$A_k = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} k^2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Sia $T \in \text{End}(V)$ tale che la sua matrice nella base e è A_k . Determinare tutti i valori di k per i quali T è un operatore unitario.

Per almeno un valore di k trovato in a):

(b) Determinare una matrice $M \in U(3)$ che diagonalizza T .

(c) Esiste una matrice $M \in O(3)$ che diagonalizza T ?

2. Sia K un campo e sia $k \in K$. In \mathbb{P}_K^3 con coordinate omogenee X_0, \dots, X_3 , consideriamo le seguenti rette :

$$r_1 : \begin{cases} X_1 = 0 \\ X_2 + X_3 = 0 \end{cases}, r_2 : \begin{cases} X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \end{cases}, s_1 : \begin{cases} X_2 = 0 \\ X_3 = 0 \end{cases}, s_2 : \begin{cases} X_1 = 0 \\ X_2 + kX_0 = 0 \end{cases}.$$

(a) Determinare la dimensione di $L(r_1, r_2)$ e di $L(s_1, s_2)$.

(b) Determinare per quali k esiste una proiettività di \mathbb{P}_K^3 che manda $L(r_1, r_2)$ in $L(s_1, s_2)$ e quando esiste scriverla esplicitamente in coordinate.

(c) Determinare per quali k esistono $P_1 \in r_1, P_2 \in r_2, Q_1 \in s_1, Q_2 \in s_2$ tali che P_1, P_2, Q_1, Q_2 sono in posizione generale.

3. Siano $k, h \in \mathbb{R}, k \neq 0$ e siano \mathcal{C}_k la conica (affine o euclidea) di equazione

$$(k+3)X^2 + kY^2 + 4XY + 1 = 0$$

e \mathcal{D}_h la conica (affine o euclidea) di equazione

$$2XY - 1 + h(X^2 - Y^2) = 0.$$

- (a) Determinare per quali k, h si ha che \mathcal{C}_k e \mathcal{D}_h sono non-degeneri, semplicemente degeneri o doppiamente degeneri e sono (o no) a centro.
- (b) Determinare l'equazione canonica euclidea di \mathcal{C}_k per ogni $k \neq 0$.
- (c) Determinare i valori $k \neq 0$ e di h per cui \mathcal{C}_k e \mathcal{D}_h sono affinementemente equivalenti (nel caso affine) o congruenti (nel caso euclideo).