TUTORATO 10 - GE210

DOCENTE: PROF. ANGELO FELICE LOPEZ
TUTORE: MATTEO RUSSO

8 Gennaio 2019
Anno accademico 2018/2019

<u>Esercizio 1</u> Sia $\mathbb{P}^2$ il piano proiettivo dotato del riferimento proiettivo standard di coordinate omogenee $[X_0, X_1, X_2]$. Si consideri la retta r_∞ descritta dalla relazione $X_0 = 0$ e sia $\mathbb{A}^2 = \mathbb{P}^2 \setminus r_\infty$ il piano affine con coordinate affini $(y_1 = X_1/X_0, y_2 = X_2/X_0)$. Si consideri al variare del parametro reale k, la conica proiettiva $\mathcal{C}_k$ descritta dall'equazione

$$\mathcal{C}_k : 2(k+1)X_1X_2 + 2(k+3)X_1^2 - 4X_2^2 + 2X_0X_1 - X_0^2 = 0$$

a) Per quali valori di k, $\mathcal{C}_k$ è non degenere?
b) Determinare una proiettività che mandi $\mathcal{C}_{-5}$ nella sua forma canonica;
c) Sia $\mathcal{D}_{-1}$ la conica affine associata alla conica proiettiva $\mathcal{C}_{-1}$. Si trovino gli eventuali punti di intersezione di $\mathcal{C}_{-1}$ con r_∞. Dedurre da questo la forma canonica affine di $\mathcal{D}_{-1}$.

<u>Esercizio 2</u> a) Sia $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ l'endomorfismo rappresentato rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{C}^3$ dalla matrice

$$M_{\mathcal{E}}(f) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ -i\sqrt{2} & 0 & i \end{pmatrix}$$

Dimostrare che f è unitario.
b) Sia $h : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ l'endomorfismo unitario definito da

$$h(x,y) = (\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{i}{\sqrt{2}}y, \frac{i}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y)$$

E' vero che $\mathcal{B} = (h(-i,0), h(0,i))$ è una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ rispetto al prodotto hermitiano standard?
c) Data la base $\mathcal{F} = ((0,1,i),(i,-2,0),(0,0,-1))$ di $\mathbb{C}^3$, determinare una base ortonormale $\mathcal{F}'$ di $\mathbb{C}^3$ rispetto al prodotto hermitiano standard. Detta poi $\mathcal{M}$ la matrice del cambiamento di base, dalla base $\mathcal{F}'$ alla base canonica di $\mathbb{C}^2$ $\mathcal{E}$, che proprietà ha $\mathcal{M}$? Giustificare la risposta.

Esercizio 3 Si consideri $\mathbb{E}^2$ con un sistema di coordinate cartesiane ortogonali (x, y). Al variare del parametro reale a, sia $f : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ la funzione definita da

$$f(x, y) = \frac{1}{5}(-3x + 4y + 10, 4x + 3y + a)$$

a) Si dimostri che, per ogni a, f è un'isometria. Inoltre si dica al variare di a, se f è un'isometria diretta o inversa e la si classifichi;
b) Posto $a = -5$, sia r la retta di punti fissi di f e $s : 2y - x = 1024$. Si ricavi $(cos(\alpha), sen(\alpha))$ dove α è l'angolo convesso formato da r ed s;
c) Si consideri la conica

$$\mathcal{C} : 3x^2 - 2xy + 10x + 3y^2 - 14y + 18 = 0$$

Si scriva la sua forma canonica euclidea e un'isometria che la riduca in forma canonica.

Esercizio 4 Nel piano proiettivo numerico $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ si considerino le rette $r : X_0 + X_2 = 0$ ed $s : X_0 - X_1 = 0$. Determinare una proiettività $\varphi : \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ tale che $\varphi(r)$ sia la retta $r' : X_0 + iX_1 = 0$ e $\varphi(s)$ sia la retta $s' : X_0 - iX_1 = 0$.

Esercizio 5 Nel piano proiettivo numerico $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ si considerino il piano $\pi : X_0 + X_1 - 2X_2 = 0$, le rette proiettive di equazioni

$$r : X_3 - 2X_0 - X_1 = 0 = X_3 + X_0 + 2X_1 - X_2$$

$$s : X_2 - 3X_0 - 3X_1 = 0 = X_1 + X_0$$

ed il punto $P = [2, 0, 1, 9]$.
a) Ricavare la posizione reciproca di r ed s, di π ed r, di π ed s e la dimensione degli spazi proiettivi $L(r, s)$, $L(\pi, r)$, $L(\pi, s)$, $L(\pi, P)$;
b) Scrivere delle equazioni cartesiane per $L(r, s)$.

Esercizio 6 Nello spazio proiettivo numerico $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ si considerino, al variare del parametro reale k, le rette

$$r_k : X_0 + 2kX_1 + X_3 = 0 = X_2 - X_0$$

$$s : X_1 + X_0 = 0 = X_3 - X_1$$

a) Per i valori di k per cui r_k ed s sono incidenti, determinare un piano che le contiene;
b) Per i valori di k per cui r_k ed s sono sghembe, determinare una retta t_k incidente ad r_k ed s e passante per $P = [1, 0, 0, 0]$.