TUTORATO 1 - GE210

DOCENTE: PROF. ANGELO FELICE LOPEZ
TUTORE: MATTEO RUSSO

19 Ottobre 2018
Anno accademico 2018/2019

<u>Esercizio 1</u> Stabilire quali tra le seguenti sono forme bilineari su $\mathbb{R}^3$ e scriverne la matrice associata A rispetto alla base canonica $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$.
Sia poi $F = (\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}, \mathbf{e_2} - \mathbf{e_3})$: scrivere la matrice B congruente ad A che rappresenta le forme bilineari nella nuova base F.

(1) $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_2$
(2) $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 + x_2 + x_3$
(3) $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{x_1y_1}$
(4) $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 5x_3y_2 + (x_2 + y_3)^2 - x_2^2 - y_3^2$
(5) $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = c$, $c \in \mathbb{R}$

<u>Esercizio 2</u> Sia $F : \mathbb{R}^3 \mathrm{x} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'applicazione definita da $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_2y_1 + 2x_1y_2 + 3x_3y_3$

(1) Verificare che F è una forma bilineare su $\mathbb{R}^3$;
(2) Stabilire se F è simmetrica o antisimmetrica;
(3) Scrivere la matrice A che rappresenta F rispetto alla base canonica $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$;
(4) Determinare se i sottospazi $U =< (1, 0, 0) >$, $V =< (0, 0, 1) >$ sono ortogonali tra loro secondo F;
(5) Dimostrare che non esistono vettori isotropi della forma $(0, 0, t)$ con $t \neq 0$.

<u>Esercizio 3</u> Determinare la matrice associata rispetto alla base $f = (\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}, \mathbf{f_3})$ con $\mathbf{f_1} = (1, 1, 1), \mathbf{f_2} = (-1, 0, 1), \mathbf{f_3} = (0, 2, 1)$, la matrice associata alla base canonica ed il rango di ciascuna delle seguenti forme bilineari:

(1) $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1$
(2) $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_2 + x_2y_3 - 2x_3y_1 + y_1x_2 + y_2x_3 - 2y_3x_1$
(3) $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_2 + x_2y_3 - x_3y_1$
(4) $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + 2x_2y_1 - x_3y_3 + 2x_1y_3$
(5) $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_2$

Determinare infine se le precedenti forme sono simmetriche o antisimmetriche.

<u>Esercizio 4</u> In ciascuno dei seguenti casi determinare la forma bilineare polare della forma quadratica $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:

(1) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_3 + x_1x_2 + x_2x_3$
(2) $q(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2 + 4x_3^2$
(3) $q(x_1, x_2, x_3) = 10x_1^2 + 3x_1x_2 + 4x_3^2 + 5x_2^2$
(4) $q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_3$

Determinare poi matrice e rango di ciascuna forma quadratica.

<u>Esercizio 5</u> Sia $V = M_2(\mathbb{R})$. Si consideri la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

e la mappa $f : V\text{x}V \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(A, B) = tr(^T AMB)$$

(1) Mostrare che f è una forma bilineare su V;
(2) Determinare la matrice associata di f rispetto alla base canonica di $M_2(\mathbb{R})$.

<u>Esercizio 6</u> Sia $b : \mathbb{R}^3\text{x}\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una forma bilineare antisimmetrica non nulla.

(1) Provare che b è degenere;
(2) Per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, $b(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$;
(3) Esiste una base di $\mathbb{R}^3$ per cui la matrice che rappresenta b è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$