TUTORATO 2 - GE210

PROF: ANGELO FELICE LOPEZ
TUTORE: MATTEO RUSSO

26 Ottobre 2018
Anno accademico 2018/2019

Esercizio 1 Determinare una base diagonalizzante per le seguenti forme bilineari simmetriche:
(1) $b : \mathbb{R}^3$ x $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ rappresentata rispetto alla base canonica dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(2) $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_2y_1 + y_2x_1 + y_1x_3 + x_1y_3 - x_2y_3 - y_2x_3$

(3) $b : \mathbb{R}^3$ x $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ rappresentata rispetto alla base canonica dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinare, infine, per ogni forma, la relativa base di Sylvester.

Esercizio 2 Diagonalizzare

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & k \\ 2 & k & 0 \end{pmatrix}$$

al variare di k $\in \mathbb{R}$, quindi determinare la segnatura della forma quadratica associata al variare del parametro.

Esercizio 3 Si consideri la forma quadratica $Q : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tale che

$$Q \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_4)^2$$

(1) Trovare una base di $M_2(\mathbb{R})$ diagonalizzante per Q, scrivere l'espressione di Q rispetto a tale base, quindi determinarne rango e segnatura;

(2) Provare che ogni base diagonalizzante per Q contiene esattamente una matrice della forma

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}$$

con $\alpha \neq 0$.

Esercizio 4 Verificare che le seguenti forme bilineari definiscono un prodotto scalare

(1) $< \mathbf{x}, \mathbf{y} >= x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_3$, su $\mathbb{R}^3$

(2) $< \mathbf{x}, \mathbf{y} >= x_1y_1 + 6x_2y_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + x_3y_3 - x_2y_3 - x_3y_2 + x_4y_4$, su $\mathbb{R}^4$

Esercizio 5 Data la base di $\mathbb{R}^4$

$$\mathbf{v_1} = (1, 0, 1, 0), \mathbf{v_2} = (1, 2, 1, 0), \mathbf{v_3} = (0, -1, 1, 0), \mathbf{v_4} = (0, 0, 0, -3)$$

, costruire, a partire da questa, una base ortonormale.

Esercizio 6 Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ tali che $(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} = 0$, $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Cosa possiamo dedurre su $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$?