TUTORATO 5 - GE210

DOCENTE:PROF. ANGELO FELICE LOPEZ
TUTORE: MATTEO RUSSO

23 Novembre 2018
Anno accademico 2018/2019

<u>Esercizio 1</u> Stabilire quali delle seguenti sono forme hermitiane:
(1) $h : \mathbb{C}^2 \text{x} \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1\bar{y_1} + ix_1\bar{y_2} + ix_2\bar{y_1}$;
(2) $h : \mathbb{C}^2 \text{x} \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1\bar{y_1} + 2x_2\bar{y_2}$;
(3) $h : \mathbb{C}^2 \text{x} \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = i|x_1||y_1|$;
(4) $h : \mathbb{C}^2 \text{x} \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1\bar{y_1} + 2ix_1\bar{y_2} - 2ix_2\bar{y_1}$
(5) $h : \mathbb{C}^3 \text{x} \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$, $h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1\bar{y_2} - x_3\bar{y_2} + x_2\bar{y_3}$;

<u>Esercizio 2</u> Per ciascuna forma hermitiana h su $\mathbb{C}^2$ dell'esercizio precedente scrivere la matrice S associata alla forma bilineare simmetrica s associata ad h e determinare se h è definita positiva. In caso affermativo, ortonormalizzare la base canonica rispetto al prodotto hermitiano definito da h.

<u>Esercizio 3</u> Stabilire quali delle seguenti matrici sono hermitiane:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ 1 & 2 & 1+i \\ -i & 1-i & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1-2i & 3 \\ 1+2i & 6 & 2i \\ 3 & -2i & 0 \end{pmatrix}$$

Per le matrici hermitiane, determinare una base ortonormale dello spazio rispetto cui tali matrici assumano una forma diagonale.

<u>Esercizio 4</u> Dopo aver verificato che i vettori $\mathbf{v_1} = (1, i, 0), \mathbf{v_2} = (0, i, 0)$, $\mathbf{v_3} = (0, 0, 1+i)$ formano una base di $\mathbb{C}^3$, utilizzare il procedimento di Gram-Schmidt rispetto al prodotto hermitiano standard per determinare una base ortonormale.

Esercizio 5 Dimostrare che le matrici

$$A = \begin{pmatrix} cos\theta & isen\theta \\ isen\theta & cos\theta \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} icos\theta & isen\theta \\ -sen\theta & cos\theta \end{pmatrix}$$

sono matrici unitarie per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$.

Esercizio 6 Sia $A \in M_n(\mathbb{C})$ una matrice *antihermitiana* cioè tale che soddisfi la relazione ${}^tA = -\bar{A}$. Dimostrare che:
(1) Se λ è un autovalore di A allora λ è un immaginario puro;
(2) Autospazi relativi ad autovalori distinti sono ortogonali.