TUTORATO 6 - GE210

DOCENTE: PROF. ANGELO FELICE LOPEZ
TUTORE: MATTEO RUSSO

30 Novembre 2018
Anno accademico 2018/2019

Esercizio 1 Discutere se i seguenti punti di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sono distinti o coincidenti:

- (1) $A = [1, -7]$, $B = [2, 0]$, $C = [2, -21]$, $D = [5, 0]$, $E = [3, -21]$;
(2) $P = [2 - i, 3 + 2i]$, $Q = [3 + i, 1 + 5i]$, $R = [2 + i, 0]$, $S = [3 - 4i, 8 + i]$,
 $T = [1, 0]$.

Esercizio 2 In $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, sia s la retta passante per i punti $S = [-1, 1, 2]$,
 $T = [2, -3, 2]$.

- (1) Determinare equazioni parametriche e omogenee per la retta s .
(2) Sia r la retta di equazione $3X_0 + X_1 - 2X_2 = 0$. Determinare l'intersezione tra le rette r ed s .

Esercizio 3 Sia $\mathbf{W}$ il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da $\mathbf{w}_1 = (1, 0, 1, 1)$ e
 $\mathbf{w}_2 = (2, 0, -1, 1)$. Siano $\mathbf{S}_1 = \mathbb{P}(\mathbf{W})$, $\mathbf{S}_2 = \mathbb{P}(\langle \mathbf{w}_1 \rangle)$ ed $\mathbf{S}_3$ il sottospazio
definito dall'equazione $X_0 + 3X_1 + X_2 + X_3 = 0$. Determinare:

- (1) Dimensione e codimensione di $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$ ed $\mathbf{S}_3$;
(2) Una parametrizzazione per $\mathbf{S}_1$ ed una per $\mathbf{S}_3$;
(3) Un sistema normale di equazioni omogenee per $\mathbf{S}_1$.

Esercizio 4 (1) Siano $Q_0 = [1, 0, 1]$, $Q_1 = [1, -1, 1]$, $Q_2 = [1, 1, 1]$,
 $Q_3 = [1, 0, 3]$, $Q_4 = [2, 1, 1]$ punti del piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Determinare se i
seguenti insiemi sono formati da punti indipendenti:

- 1.1) $\{Q_0, Q_1\}$;
1.2) $\{Q_0, Q_1, Q_2\}$;
1.3) $\{Q_0, Q_1, Q_3\}$;
1.4) $\{Q_0, Q_1, Q_3, Q_4\}$.

(2) In $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ determinare un insieme massimale di punti indipendenti nel sotto-
spazio $\mathbf{Z}$ di equazioni $3X_0 - X_1 + X_2 - 2X_4 = 0 = X_3 - X_4$.

Esercizio 5 Determinare un'equazione omogenea per ogni retta di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$
passante per il punto $P = [3, -1, 5]$.

Esercizio 6 Sia $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ uno spazio proiettivo di dimensione n e sia $\mathbb{P}(\mathbf{W})$ un
sottospazio di dimensione s . Dimostrare che, se $\mathbb{P}(\mathbf{W})$ non è contenuto in un
iperpiano $\mathbf{H}$, allora $\dim(\mathbb{P}(\mathbf{W}) \cap \mathbf{H}) = s - 1$.

Esercizio 7 In $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, determinare se le rette r ed s sono complanari o sghembe,

$$r : 3X_0 + X_1 = 0 = X_0 - X_2 + X_3$$

$$s : X_1 + X_2 - X_3 = 0 = X_0 + X_3$$

Esercizio 8 Determinare i valori di $k \in \mathbb{C}$ per cui la base

$$\mathcal{B} = \left\{ (0, k, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i, -2k, i - 1) \right\}$$

sia ortonormale rispetto al prodotto hermitiano h la cui matrice associata rispetto alla base canonica di $\mathbb{C}^3$ è

$$H = \begin{pmatrix} 5 & 1 + i & -2i \\ 1 - i & 1 & 0 \\ 2i & 0 & 2 \end{pmatrix}$$