TUTORATO 1 - GE210

DOCENTE: PROF. ANGELO FELICE LOPEZ
TUTORE: MATTEO RUSSO

7 Dicembre 2018
Anno accademico 2018/2019

Esercizio 1 Sia $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ uno spazio proiettivo di dimensione n e $\mathbb{P}(\mathbf{W})$ un suo sottospazio proiettivo di dimensione $0 < r < n$. Dimostrare che $\mathbb{P}(\mathbf{W})$ è contenuto in un iperpiano di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$.

Esercizio 2 In $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ siano assegnati i punti $P = [1+i, 1, 5, 3]$, $Q = [3, i, 1, i]$. Determinare equazioni omogenee e parametriche per la retta r passante per P e Q.

Esercizio 3 Sia $\mathbb{P}^3$ lo spazio proiettivo reale. Si considerino i seguenti sottospazi

$$S_1 : 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 = x_2 - x_3$$

$$S_2 : x_0 + x_1 - x_2 + x_3 = x_1 - x_0 = x_2 - 2x_0 - x_3 = 0$$

$$S_3 : x_1 + x_3 = x_2 - x_0 = x_2 + x_1 = 0$$

a) Si determino dimesioni e codimensioni di S_1, S_2, S_3, $S_1 \cap S_3$;
b) Si scrivano delle equazioni cartesiane per $T = L(S_1, S_2)$;
c) Ricavare $U = L(S_1, S_2, S_3)$.

Esercizio 4 Sia $\mathbb{P}^3$ lo spazio proiettivo reale. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbf{V_1} =< (1, 0, 3, 2), (3, 0, -1, 0) >$ e i sottospazi proiettivi $S_1 = \mathbb{P}(\mathbf{V_1})$ e

$$S_2 : x_0 - 2x_1 + x_3 = 0 = 2x_0 + 2x_3 + ax_1$$

dove $a \in \mathbb{R}$. Siano poi gli spazi affini $U_0 = \{x_0 \neq 0\}$ e $U_2 = \{x_2 \neq 0\}$.
a) Si dica al variare di $a \in \mathbb{R}$ quali sono le dimensioni di S_1, S_2, $S_1 \cap S_2$, $L(S_1, S_2)$;
b) Per $a = 3$ si ricavino equazioni cartesiane per $L(S_1, S_2)$;
c) Determinare equazioni cartesiane (nelle coordinate $y_i = x_i/x_0$ di U_0) di $S_1 \cap U_0$;
d) Sia r la retta affine di U_2 passante per $(100, 43, \sqrt{7})$ e vettore direttore $(1, 4, -2)$. Sia $\bar{r}$ la sua chiusura proiettiva. Si ricavino delle equazioni cartesiane per $\bar{r}$ e i suoi punti impropri.

Esercizio 5 Sia $\mathbb{P}^2$ il piano proiettivo reale e si identifichi $U_0 = \{x_0 \neq 0\}$ con uno spazio euclideo $\mathbb{E}^2$ di coordinate $y_i = x_i/x_0$, $i = 1, 2$. Si considerino in U_0 la retta r passante per (0,1) avente direzione (1,k), $k \in \mathbb{R}$ e la retta $s : y_1 - 2y_2 - 1 = 0$. Si ricavino le chiusure proiettive $\bar{r}, \bar{s}$ e le intersezioni $r \cap s$, $\bar{r} \cap \bar{s}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 6 Nel piano euclideo, sia fissato un riferimento di coordinate (x,y) e si assegni, nel completamento proiettivo del piano, il sistema di coordinate omogenee $[X_0, X_1, X_2]$.
a) Determinare coordinate omogenee per $P = (3, 2)$;
b) Determinare l'equaione omogenea del completamento proiettivo della retta affine $s : 5x - 7y + 12 = 0$ e calcolarne il punto improprio;
c) Determinare l'equazione omogenea della retta passante per P e avente lo stesso punto improprio della chiusura proiettiva di s;
d) Determinare l'equazione cartesiana della retta affine il cui completamento proiettivo ha equazione $2X_1 - X_2 + 4X_0 = 0$.