TUTORATO 8 - GE210

DOCENTE: PROF. ANGELO FELICE LOPEZ
TUTORE: MATTEO RUSSO

14 Dicembre 2018
Anno accademico 2018/2019

<u>Esercizio 1</u> Nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, siano assegnati i punti $P = [2, 1, 2]$ e $Q = [1, 0, 7]$. Determinare nel piano proiettivo duale $(\mathbb{P}^2)^*$ le coordinate proiettive del punto corrispondente alla retta r per P e Q. Determinare inoltre equazioni parametriche e cartesiane della retta di $(\mathbb{P}^2)^*$ corrispondente al punto P.

<u>Esercizio 2</u> Si consideri $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ con riferimento standard. Determinare equazioni cartesiane e parametriche in $(\mathbb{P}^3)^*$ (rispetto al riferimento duale) del fascio di iperpiani di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ di centro la retta generata da $[1, 1, 5, 0]$ e $[1, 0, -2, 1]$. Esiste un iperpiano di tale fascio che passi per $[0, 1, 1, 0]$?

<u>Esercizio 3</u> Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ sia fissato un sistema di riferimento $\mathcal{R}$. Sia $Z = L(Q_1, Q_2)$ dove $Q_1 = [1, 0, 3, 0]$ e $Q_2 = [0, 2, 0, 1]$.
a) Determinare un sistema normale di equazioni per il sottospazio Z;
b) Determinare una rappresentazione parametrica della stella di iperpiani $\mathcal{H}(Z)$ di centro Z;
c) Determinare un sistema di equazioni normali in $(\mathbb{P}^3)^*$ per $\mathcal{H}(Z)$.

<u>Esercizio 4</u> Sia $\mathcal{P}$ la seguente proposizione: "Siano r ed r' due rette sghembe di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ di dimensione 3 su $\mathbb{K}$ e sia Q un punto che non appartiene nè ad r nè ad r'. Allora esiste una ed una sola retta r'' passante per Q e complanare con r ed r'." Determinare la proposizione duale $\mathcal{P}^*$ e verificarla direttamente.

<u>Esercizio 5</u> Si consideri la proiettività φ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ in sè di equazioni

$$\begin{cases} Y_0 = X_0 + X_1 \\ Y_1 = X_1 + X_2 \\ Y_2 = X_2 \end{cases}$$

e la retta $r : 3X_1 + 2X_2 + X_3 = 0$.
Determinare un'equazione omogenea per $\varphi(r)$.

Esercizio 6 Sia $\varphi : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ una proiettività avente equaioni

$$\begin{cases} Y_0 = X_0 - X_1 \\ Y_1 = X_0 + X_1 + 2X_2 \\ Y_2 = X_1 \end{cases}$$

a) Determiare equazioni parametriche per l'immagine tramite φ della retta r di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ avente equazioni parametriche $(X_0, X_1, X_2) = (\lambda, 2\lambda - \mu, 2\mu)$ dove $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$;
b) Determinare equazioni omogenee per l'immagine tramite φ della retta
$s : X_0 - X_1 + 3X_2 = 0$;
c) Determinare equazioni omogenee per l'immagine tramite φ della retta t passante per $[6, -1, 0]$ e $[1, -2, 1]$.

Esercizio 7 In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ consideriamo i punti $A = [1, 1, 0]$, $B[1, 2, 1]$, $C = [1, -1, 1]$, $D = [1, 0, 1]$.
a) Mostrare che tali punti sono in posizione generale;
b) Determinare le equazioni della proiettività $\varphi : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che $\varphi([1, 0, 0]) = A$, $\varphi([0, 1, 0]) = B$, $\varphi([0, 0, 1]) = C$, $\varphi([1, 1, 1]) = D$.

Esercizio 8 Dimostrare che m iperpiani di $\mathbb{P}^n$ con $1 \leq m \leq n$ hanno intersezione mai vuota.