TUTORATO 9 - GE210

DOCENTE: PROF. ANGELO FELICE LOPEZ
TUTORE: MATTEO RUSSO

21 Novembre 2018
Anno accademico 2018/2019

<u>Esercizio 1</u> Determinare la chiusura proiettiva e i punti impropri delle seguenti curve algebriche di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$:
a) $x + 2y^2 - 1 = 0$
b) $(xy)^2 - 1 = 0$
c) $3y + xy + xy^2 = 0$
d) $x^2y - xy^2 + x^2 - y = 0$
e) $2x^2 - y^2 + 2xy + 4y + 1 = 0$

<u>Esercizio 2</u> Sia $\mathbb{P}^2$ il piano proiettivo reale e sia $[X_0, X_1, X_2]$ un sistema di coordinate proiettive. Si consideri, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la conica di equazione

$$\mathcal{C}_k : kX_0^2 + 2kX_0X_2 + (2-2k)X_1X_2 + (1-k)X_2^2 = 0$$

a) Si dica per quali valori di k, $\mathcal{C}_k$ è degenere e la si classifichi per questi valori;
b) Si scriva la forma canonica della conica $\mathcal{C}_2$ e una proiettività che la riduca nella sua forma canonica.

<u>Esercizio 3</u> Sia $\mathbb{P}^2$ il piano proiettivo reale e sia $[X_0, X_1, X_2]$ un sistema di coordinate proiettive. Si consideri, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la conica di equazione

$$\mathcal{C}_k : kX_1^2 + 2X_1X_2 + (2-2k)X_0X_2 + (2-k)X_2^2 = 0$$

a) Si dica per quali valori di k, $\mathcal{C}_k$ è degenere e la si classifichi per questi valori;
b) Si scriva la forma canonica della conica $\mathcal{C}_{-1}$ e una proiettività che la riduca nella sua forma canonica.

<u>Esercizio 4</u> Sia $\mathbb{E}^2$ il piano euclideo dotato di un riferimento ortonormale di coordinate (x,y). Si consideri, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & -2k-2 & -k-1 \\ -2k-2 & 5k-1 & 2 \\ -k-1 & 2 & 5k-4 \end{pmatrix}$$

e la conica $\mathcal{C}_k$ determinata da tale matrice.
a) Sapendo che $det(A) = -25(k-1)^3$, si dica per quali valori di k la conica $\mathcal{C}_k$ è un'iperbole e per quali valori è degenere;
b) Sia k_0 un valore per cui $\mathcal{C}_k$ è una parabola. Scrivere la sua forma canonica affine e un'isometria *diretta* che trasformi $\mathcal{C}_{k_0}$ nella sua forma canonica euclidea.

Esercizio 5 Si consideri il piano affine reale $\mathbb{A}^2$ munito di coordinate cartesiane (x,y) e di centro O. Si consideri, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la conica di equazione

$$\mathcal{C}_k : -4x^2 + 8xy - 3x - 4y^2 + (k+4)y = 0$$

a) Scrivere la forma canonica della conica al variare del parametro k;
b) Posto $k = 1$, scrivere un'affinità che riduca a forma canonica la parabola $\mathcal{C}_1$;
c) Scrivere, se possibile, un'affinità che trasformi $\mathcal{C}_1$ nella conica $\mathcal{D}$ di equazione $x + y^2 + 3 = 0$. In caso contrario, motivare la risposta.

Esercizio 6 Nel piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ si considerino le rette $r : X_1 + X_2 = 0$ e $s : X_0 = 0$. Determinare le equazioni di una proiettività $\varphi : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che $\varphi(r)$ sia la retta $r' : X_0 + X_1 = 0$ e $\varphi(s)$ sia la retta s' passante per $[1, 0, 3]$ e $[1, 1, 1]$.