UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE210 - Geometria 2

a.a. 2019-2020

Prova scritta del 15-9-2020

TESTO E SOLUZIONI

Svolgere tutti gli esercizi.

1. Sia $k \in \mathbb{C}$. Sia V uno spazio vettoriale hermitiano e sia $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ una sua base tale che $e' = \{e_1, e_3, e_1 + e_2\}$ è una base ortonormale. Sia $T : V \to V$ un operatore lineare tale che

$$T(e_1) = (1 + k)e_1 + ke_2, T(e_2) = -(1 + k)e_1 - ke_2 - e_3, T(e_3) = (k - 1)e_1 - e_2 + e_3.$$

(a) Determinare (se esistono) tutti i valori di k per i quali T è un operatore hermitiano.
(b) Per un valore di k trovato in (a) determinare una base ortonormale che diagonalizza T.
(c) Determinare (se esistono) tutti i valori di k per i quali T è un operatore unitario.
(d) Determinare il prodotto vettoriale $e_2 \wedge T(e_1)$.

SOLUZIONE:

(a) e (c) Come è noto, T è un operatore hermitiano (unitario) se e solo se la sua matrice, in una base ortonormale, è hermitiana (unitaria). Utilizziamo pertanto la base e'. Si ha

$$T(e_1) = (1 + k)e_1 + ke_2 = ae_1 + be_3 + c(e_1 + e_2) = (a + c)e_1 + ce_2 + be_3$$

se e solo se

$$\begin{cases} a + c = 1 + k \\ c = k \\ b = 0 \end{cases}$$

che ha soluzione $a = 1, b = 0, c = k$. Pertanto

$$T(e_1) = 1e_1 + 0e_3 + k(e_1 + e_2).$$

Ora

$$T(e_3) = (k - 1)e_1 - e_2 + e_3 = ae_1 + be_3 + c(e_1 + e_2) = (a + c)e_1 + ce_2 + be_3$$

se e solo se

$$\begin{cases} a+c=k-1 \\ c=-1 \\ b=1 \end{cases}$$

che ha soluzione $a=k, b=1, c=-1$. Pertanto

$$T(e_3) = ke_1 + 1e_3 - 1(e_1+e_2).$$

Inoltre

$$T(e_1+e_2) = -e_3 = 0e_1 - 1e_3 + 0(e_1+e_2).$$

Ne segue che

$$M_{e'}(T) = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ k & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ora $M_{e'}(T)$ è hermitiana se e solo se ${}^t\overline{M_{e'}(T)} = M_{e'}(T)$, ovvero se e solo se

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \overline{k} \\ \overline{k} & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ k & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ovvero se e solo se $k=0$. Se ne deduce che T è un operatore hermitiano se e solo se $k=0$. Invece $M_{e'}(T)$ è unitaria se e solo se ${}^t\overline{M_{e'}(T)}M_{e'}(T) = I_3$, ovvero se e solo se

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \overline{k} \\ \overline{k} & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ k & -1 & 0 \end{pmatrix} = I_3.$$

Questo però implica, per esempio, che il prodotto tra la seconda riga e la terza colonna è 0, ovvero che $-1=0$, assurdo. Se ne deduce che non esistono valori di k per i quali T è un operatore unitario.

(b) Posto allora $k=0$ si ha

$$M_{e'}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e il suo polinomio caratteristico è

$$P_T(s) = \begin{vmatrix} 1-s & 0 & 0 \\ 0 & 1-s & -1 \\ 0 & -1 & -s \end{vmatrix} = (1-s)(s^2-s-1)$$

e quindi gli autovalori di T sono $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \lambda_3 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. I corrrispondenti autovettori sono dati dalle soluzioni dei sistemi

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_i & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda_i & -1 \\ 0 & -1 & -\lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

per $i = 1, 2, 3$, ovvero dei sistemi

$$\begin{cases} (1-\lambda_i)x = 0 \\ (1-\lambda_i)y - z = 0 \\ -y - \lambda_i z = 0 \end{cases}$$

che ha soluzioni $x = 1, y = z = 0$ per $i = 1$, $x = 0, y = -\lambda_i, z = 1$ per $i = 2, 3$. Pertanto gli autovettori, ricordando che siamo nella base e', sono

$$v_1 = e_1, v_2 = -\lambda_2 e_3 + (e_2 + e_3), v_3 = -\lambda_3 e_3 + (e_2 + e_3).$$

Dato che e' è una base ortonormale si verifica subito che $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base ortogonale che diagonalizza T e quindi

$$\{v_1, \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_2^2}} v_2, \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_3^2}} v_3\}$$

è una base ortonormale che diagonalizza T.

(d) Per calcolare il prodotto vettoriale utilizziamo la base ortonormale e'.

Si ha $e_2 = (e_1 + e_2) - e_1$ e, per quanto visto sopra $T(e_1) = 1e_1 + 0e_3 + k(e_1 + e_2)$. Quindi $e_2 \wedge T(e_1)$ avrà, nella base e' le coordinate che sono i minori 2×2 a segni alterni di

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix}$$

e quindi

$$e_2 \wedge T(e_1) = 0e_1 + (k+1)e_3 + 0(e_1 + e_2) = (k+1)e_3. \quad \blacksquare$$

2. Sia K un campo e sia $k \in K$. In $\mathbb{P}^4_K$ con coordinate omogenee $X_0, \ldots, X_4$, consideriamo le seguenti rette:

$$r_1 : \begin{cases} X_1 = 0 \\ X_3 = 0 \\ X_1 + X_4 = 0 \end{cases}, r_2 : \begin{cases} X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \\ X_4 = 0 \end{cases}$$

ed i seguenti piani

$$p_1 : \begin{cases} X_3 = 0 \\ X_4 = 0 \end{cases}, p_2 : \begin{cases} X_2 = 0 \\ kX_0 + X_4 = 0 \end{cases}.$$

(a) Determinare la dimensione di $L(r_1, p_1)$ e di $L(r_2, p_2)$.
(b) Determinare per quali k esiste una proiettività di $\mathbb{P}^4_K$ che manda $L(r_1, p_1)$ in $L(r_2, p_2)$.
(c) Determinare per quali k esistono $P_1 \in r_1, P_2 \in r_2, Q_1 \in p_1, Q_2 \in p_2$ tali che P_1, P_2, Q_1, Q_2 sono in posizione generale.

SOLUZIONE:

(a) Si ha ovviamente che $r_1 \subset p_1$ e quindi, ovviamente, $L(r_1, p_1) = p_1$. Si ha

$$r_2 \cap p_2 : \begin{cases} X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \\ X_4 = 0 \\ X_2 = 0 \\ kX_0 + X_4 = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$r_2 \cap p_2 : \begin{cases} X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \\ X_4 = 0 \\ kX_0 = 0 \end{cases}$$

quindi, se $k \neq 0$, $r_2 \cap p_2 = \{[0, 0, 0, 1, 0]\}$ è un punto, mentre se $k = 0$ si ha che $r_2 \subset p_2$ da cui $L(r_2, p_2) = p_2$. Se $k \neq 0$ si ha, per la formula di Grassmann,

$$\dim L(r_2, p_2) = \dim r_2 + \dim p_2 - \dim r_2 \cap p_2 = 3.$$

(b) Sappiamo che esiste una proiettività se e solo se $L(r_1, p_1)$ e $L(r_2, p_2)$ hanno la stessa dimensione, quindi se e solo se $k = 0$.
(c) Siano $P_1 = [1, 0, 1, 0, 0], P_2 = [1, 0, 0, 1, 0], Q_1 = [1, 1, 2, 0, 0], Q_2 = [1, 1, 0, 0, -k]$. Si verifica immediatamente che tali punti sono linearmente indipendenti e quindi in posizione generale per ogni k. ■

3. Siano $k, h \in \mathbb{R}$ e siano $\mathcal{C}_k$ la conica (affine o euclidea) di equazione

$$kX^2 + 4Y^2 + (k-2)XY - 1 = 0$$

e $\mathcal{D}_h$ la conica (affine o euclidea) di equazione

$$hX^2 + (1-h)Y^2 + 1 = 0.$$

(a) Determinare per quali k, h si ha che $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono non degeneri, semplicemente degeneri o doppiamente degeneri e sono (o no) a centro.
(b) Determinare l'equazione canonica euclidea di $\mathcal{C}_k$ per ogni k.

(c) Determinare i valori k e di h per cui $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono affinemente equivalenti (nel caso affine) o congruenti (nel caso euclideo).

SOLUZIONE:

(a) La matrice di $\mathcal{C}_k$ è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & k & \frac{k-2}{2} \\ 0 & \frac{k-2}{2} & 4 \end{pmatrix}$$

e si ha $\det(A) = \frac{k^2-20k+4}{4} = 0$ se solo se $k = 10 \pm 4\sqrt{6}$ e, in tal caso, si vede subito che A ha rango 2. Pertanto

$$\mathcal{C}_k \text{ è: non degenere se } \ k \neq 10 \pm 4\sqrt{6}, \text{ semplicemente degenere se } \ k = 10 \pm 4\sqrt{6}.$$

Invece

$$A_0 = \begin{pmatrix} k & \frac{k-2}{2} \\ \frac{k-2}{2} & 4 \end{pmatrix}$$

e si ha $\det(A_0) = \frac{k^2-20k+4}{4} = 0$ se solo se $k = 10 \pm 4\sqrt{6}$ quindi

$$\mathcal{C}_k \text{ è: a centro se } k \neq 10 \pm 4\sqrt{6}, \text{ non a centro se } k = 10 \pm 4\sqrt{6}.$$

La matrice di $\mathcal{D}_h$ è

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & 1-h \end{pmatrix}$$

e si ha $\det(B) = h(1-h)$ e pertanto

$$\mathcal{D}_h \text{ è: non degenere se } h \neq 0,1 \text{ semplicemente degenere se } \ h = 0,1.$$

Inoltre

$$B_0 = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1-h \end{pmatrix}$$

e si ha $\det(B_0) = h(1-h)$ e pertanto

$$\mathcal{D}_h \text{ è: a centro se } h \neq 0,1 \text{ non a centro se } \ h = 0,1.$$

(b) Il polinomio caratteristico di A_0 è

$$\begin{vmatrix} k-T & \frac{k-2}{2} \\ \frac{k-2}{2} & 4-T \end{vmatrix} = T^2 - (4+k)T + 4k - \frac{(k-2)^2}{4}$$

e pertanto gli autovalori sono $\lambda_1 = \frac{4+k-\sqrt{2k^2-12k+20}}{2}, \lambda_2 = \frac{4+k+\sqrt{2k^2-12k+20}}{2}$, in quanto $2k^2 - 12k + 20 \geq 0$ per ogni k.
Come è noto, applicando l'isometria corrispondente ad una base ortonormale di autovettori si ottiene l'equazione

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 - 1 = 0.$$

Per arrivare all'equazione canonica euclidea di $\mathcal{C}_k$ occorre studiare il segno degli autovalori. Osserviamo allora che si ha

$$\lambda_1 \geq 0$$

se e solo se

$$4 + k \geq \sqrt{2k^2 - 12k + 20}$$

se e solo se

$$k \geq -4 \text{ e } k^2 - 20k + 4 \leq 0$$

se e solo se

$$10 - 4\sqrt{6} \leq k \leq 10 + 4\sqrt{6}.$$

In particolare

$$\lambda_1 = 0 \text{ se e solo se } k = 10 \pm 4\sqrt{6}.$$

Invece

$$\lambda_2 \geq 0$$

se e solo se

$$\sqrt{2k^2 - 12k + 20} \geq -4 - k$$

se e solo se

$$k \geq -4 \text{ oppure } \{k \leq -4 \text{ e } k^2 - 20k + 4 \geq 0\}$$

se e solo se

$$k \geq -4 \text{ oppure } k \leq -4 \text{ e } \{k \leq 10 - 4\sqrt{6} \text{ o } k \geq 10 + 4\sqrt{6}\}$$

quindi $\lambda_2 \geq 0$ per ogni k. Inoltre si vede che

$$\lambda_2 > 0 \text{ per ogni } k.$$

Scambiando X e Y si ha

$$(*) \quad \lambda_2 X^2 + \lambda_1 Y^2 - 1 = 0.$$

Caso 1: $k = 10 \pm 4\sqrt{6}$.
Si ha

$$\lambda_2 X^2 - 1 = 0$$

da cui scambiando X e Y e dividendo per λ_2 si ottiene l'equazione canonica euclidea

$$Y^2 = (\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}})^2$$

e l'equazione canonica affine

$$Y^2 = 1.$$

Caso 2: $k < 10 - 4\sqrt{6}$ o $k > 10 + 4\sqrt{6}$.
Allora $\lambda_1 < 0$ e dalla $(*)$ si ottiene l'equazione canonica euclidea

$$\frac{X^2}{(\sqrt{\frac{1}{\lambda_2}})^2} - \frac{Y^2}{(\sqrt{\frac{1}{-\lambda_1}})^2} = 1$$

e l'equazione canonica affine

$$X^2 - Y^2 = 1.$$

Caso 3: $10 - 4\sqrt{6} < k < 10 + 4\sqrt{6}$.
Allora $\lambda_1 > 0$ e dalla $(*)$ si ottiene

$$\frac{X^2}{(\sqrt{\frac{1}{\lambda_2}})^2} + \frac{Y^2}{(\sqrt{\frac{1}{\lambda_1}})^2} = 1$$

da cui, scambiando X e Y e osservando che $\sqrt{\frac{1}{\lambda_1}} \geq \sqrt{\frac{1}{\lambda_2}}$, si ha l'equazione canonica euclidea

$$\frac{X^2}{(\sqrt{\frac{1}{\lambda_1}})^2} + \frac{Y^2}{(\sqrt{\frac{1}{\lambda_2}})^2} = 1$$

e l'equazione canonica affine

$$X^2 + Y^2 = 1.$$

(c) Se $h = 0, 1$ si ha che $\mathcal{D}_h$ ha equazione canonica affine

$$Y^2 + 1 = 0$$

quindi in tal caso $\mathcal{D}_h$ non è equivalente a $\mathcal{C}_k$.

Se $0 < h < 1$ allora $\mathcal{D}_h$ ha equazione canonica affine

$$X^2 + Y^2 + 1 = 0$$

quindi anche in questo caso $\mathcal{D}_h$ non è equivalente a $\mathcal{C}_k$.
Invece se $h < 0$ si vede subito che l'equazione canonica euclidea di $\mathcal{D}_h$ è

$$\frac{X^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{-h}}\right)^2} - \frac{Y^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{1-h}}\right)^2} = 1$$

e l'equazione canonica affine

$$X^2 - Y^2 = 1.$$

Infine se $h > 1$ si vede subito che l'equazione canonica euclidea di $\mathcal{D}_h$ è

$$\frac{X^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{h-1}}\right)^2} - \frac{Y^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{h}}\right)^2} = 1$$

e l'equazione canonica affine

$$X^2 - Y^2 = 1.$$

Se ne deduce che $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono affinemente equivalenti se e solo se $h < 0$ o $h > 1$ e $k < 10 - 4\sqrt{6}$ o $k > 10 + 4\sqrt{6}$.
Negli stessi casi verifichiamo quando sono congruenti.
Se $h < 0$, $\mathcal{D}_h$ e $\mathcal{C}_k$ sono congruenti se e solo se

$$\frac{1}{\lambda_2} = -\frac{1}{h} \text{ e } -\frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{1-h}$$

ovvero se e solo se

$$(**) \quad -\lambda_2 = h = 1 + \lambda_1.$$

Se $h > 1$, $\mathcal{D}_h$ e $\mathcal{C}_k$ sono congruenti se e solo se

$$\frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{h-1} \text{ e } -\frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{h}$$

ovvero se e solo se

$$(**) \;\; 1 + \lambda_2 = h = -\lambda_1.$$

In entrambi i casi si ha che $\lambda_1 + \lambda_2 = -1$ e sappiamo che $\lambda_1 + \lambda_2 = 4 + k$, quindi necessariamente $k = -5$. Poi le $(**)$ implicano che $h = \frac{1\pm\sqrt{10}}{2}$. Viceversa se $k = -5, h = \frac{1\pm\sqrt{10}}{2}$ allora le $(**)$ valgono. Se ne deduce che $\mathcal{D}_h$ e $\mathcal{C}_k$ sono congruenti se e solo se $k = -5, h = \frac{1\pm\sqrt{10}}{2}$. ■