UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE210 - Geometria 2

a.a. 2019-2020

Prova scritta del 15-9-2020

TESTO

Svolgere tutti gli esercizi.

1. Sia $k \in \mathbb{C}$. Sia V uno spazio vettoriale hermitiano e sia $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ una sua base tale che $e' = \{e_1, e_3, e_1 + e_2\}$ è una base ortonormale. Sia $T : V \to V$ un operatore lineare tale che

$$T(e_1) = (1 + k)e_1 + ke_2, T(e_2) = -(1 + k)e_1 - ke_2 - e_3, T(e_3) = (k - 1)e_1 - e_2 + e_3.$$

(a) Determinare (se esistono) tutti i valori di k per i quali T è un operatore hermitiano.

(b) Per un valore di k trovato in (a) determinare una base ortonormale che diagonalizza T.

(c) Determinare (se esistono) tutti i valori di k per i quali T è un operatore unitario.

(d) Determinare il prodotto vettoriale $e_2 \wedge T(e_1)$.

2. Sia K un campo e sia $k \in K$. In $\mathbb{P}^4_K$ con coordinate omogenee $X_0, \dots, X_4$, consideriamo le seguenti rette:

$$r_1 : \begin{cases} X_1 = 0 \\ X_3 = 0 \\ X_1 + X_4 = 0 \end{cases}, r_2 : \begin{cases} X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \\ X_4 = 0 \end{cases}$$

ed i seguenti piani

$$p_1 : \begin{cases} X_3 = 0 \\ X_4 = 0 \end{cases}, p_2 : \begin{cases} X_2 = 0 \\ kX_0 + X_4 = 0 \end{cases}.$$

(a) Determinare la dimensione di $L(r_1, p_1)$ e di $L(r_2, p_2)$.

(b) Determinare per quali k esiste una proiettività di $\mathbb{P}^4_K$ che manda $L(r_1, p_1)$ in $L(r_2, p_2)$.

(c) Determinare per quali k esistono $P_1 \in r_1, P_2 \in r_2, Q_1 \in p_1, Q_2 \in p_2$ tali che P_1, P_2, Q_1, Q_2 sono in posizione generale.

3. Siano $k, h \in \mathbb{R}$ e siano $\mathcal{C}_k$ la conica (affine o euclidea) di equazione

$$kX^2 + 4Y^2 + (k - 2)XY - 1 = 0$$

e $\mathcal{D}_h$ la conica (affine o euclidea) di equazione

$$hX^2 + (1-h)Y^2 + 1 = 0.$$

(a) Determinare per quali k, h si ha che $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono non degeneri, semplicemente degeneri o doppiamente degeneri e sono (o no) a centro.
(b) Determinare l'equazione canonica euclidea di $\mathcal{C}_k$ per ogni k.
(c) Determinare i valori k e di h per cui $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono affinemente equivalenti (nel caso affine) o congruenti (nel caso euclideo).