UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE210 - Geometria 2

a.a. 2019-2020

Prova scritta del 18-2-2020

TESTO

Svolgere tutti gli esercizi.

1. Sia $k \in \mathbb{R}, k \neq 0, \pm 1$ e sia $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica tale che

$$b(E_1, E_1) = 2, b(E_2, E_2) = b(E_3, E_3) = k + k^2, E_1 \in \langle E_2, E_3 \rangle^{\perp}$$

e il coefficiente di Fourier di $E_2 + E_3$ rispetto a E_2 è $\frac{2}{1+k}$, dove $\{E_1, E_2, E_3\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(a) Determinare la matrice e la forma canonica di Sylvester di b.

(b) Determinare una matrice $M \in O(3)$ che diagonalizza b.

(c) Determinare i valori di k per i quali b definisce un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$.

(d) Per valori di k trovati in (c) calcolare l'angolo tra E_1 ed $E_1 + E_3$ e il prodotto vettoriale $v_1 \wedge (v_2 + v_3)$ dove v_1, v_2 e v_3 sono tre autovettori distinti della matrice di b.

2. Sia E uno spazio euclideo di dimensione 3 e sia $\{O, i, j, k\}$ un suo sistema di coordinate cartesiane. Sia p il piano di E di equazione $X + Y - Z = 0$ e siano r ed s le rette di E di equazioni

$$r : \begin{cases} X - Z = 0 \\ X + Y = 0 \end{cases}, \quad s \begin{cases} X + Z = 0 \\ X - Y = 0 \end{cases}.$$

(a) Determinare (se esistono) tutti i punti $P \in r$ tali che P ha distanza 1 da s ed ha distanza 2 da p.

(b) Determinare (se esistono) tutte le rette r' che soddisfano tutte e due le seguenti condizioni: r' è perpendicolare a p e l'angolo tra r' ed r è $\frac{\pi}{4}$.

(c) Siano F_0, F_1, F_2, U i punti fondamentali e il punto unità di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$. Determinare (se esistono) tutti i punti $P \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ tali che $\{[0, 1, 1], [1, 0, 1], [1, 1, 0], P\}$ sono proiettivamente equivalenti a $\{F_0, F_1, F_2, U\}$.

3. Siano $k, h \in \mathbb{R}$ tali che $h \neq 0, k \neq 0, 2$ e siano $\mathcal{C}_k$ la conica proiettiva reale di equazione

$$X_0^2 + kX_1^2 + 2X_1X_2 + kX_2^2 = 0$$

e $\mathcal{D}_h$ la conica proiettiva reale di equazione

$$X_0^2 + hX_1^2 + X_0X_2 = 0.$$

(a) Determinare per quali k, h si ha che $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono non degeneri (distinguere se a punti reali o no), semplicemente degeneri o doppiamente degeneri.
(b) Determinare una proiettività che trasforma $\mathcal{C}_k$ nella sua equazione canonica.
(c) Considerate le coniche euclidee $\mathcal{C}'_k$ e $\mathcal{D}'_h$ associate rispettivamente a $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ (passando dal piano proiettivo a quello euclideo), determinare, se esistono, i valori di k e di h per cui $\mathcal{C}'_k$ e $\mathcal{D}'_h$ sono congruenti.