UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE210 - Geometria 2

a.a. 2019-2020

Prova scritta del 29-1-2020

TESTO E SOLUZIONI

Svolgere tutti gli esercizi.

1. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 4 con base $\{e_1, \dots, e_4\}$. Sia $b : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica tale che

$$(*) \qquad b(e_i, e_i) = 1, 1 \leq i \leq 4, b(e_1, e_2) = 1, e_3 \perp (e_1 - e_2) \text{ e } \langle e_1, e_2, e_3 \rangle \subset e_4^{\perp}.$$

(a) Determinare tutte le possibili b che soddisfano $(*)$ e la loro forma canonica di Sylvester.
(b) Per ogni b che soddisfa $(*)$ determinare una matrice $M \in SO(4)$ che diagonalizza b.
(c) Determinare se esistono b che soddisfano $(*)$ ed hanno segnatura $(1, 3)$.
(d) Determinare almeno una b che soddisfa $(*)$ ed un sottospazio W di dimensione 3 su cui la restrizione di tale b definisce un prodotto scalare. In tal caso, scegliere due vettori non nulli $v_1, v_2 \in W$ e calcolare $\|v_1 \wedge v_2\|$.

SOLUZIONE:

Si ha $b(e_i, e_4) = 0$ per $1 \leq i \leq 3$ e $b(e_3, e_1 - e_2) = 0$, da cui $b(e_1, e_3) = b(e_2, e_3)$. Posto $b(e_1, e_3) = k$ deduciamo che tutte le possibili b che soddisfano $(*)$ hanno matrice

$$M_e(b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 0 \\ 1 & 1 & k & 0 \\ k & k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico è

$$\begin{vmatrix} 1-T & 1 & k & 0 \\ 1 & 1-T & k & 0 \\ k & k & 1-T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-T \end{vmatrix} = T(T-1)(T^2 - 3T - 2k^2 + 2)$$

e quindi gli autovalori sono

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = \frac{3 + \sqrt{8k^2+1}}{2}, \lambda_4 = \frac{3 - \sqrt{8k^2+1}}{2}.$$

(a) Come sappiamo $M_e(b)$ è diagonalizzabile e sulla diagonale ci andranno gli autovalori. Osservando che $\lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$ per ogni k, mentre $\lambda_4 \geq 0$ se e solo se $-1 \leq k \leq 1$, la forma canonica di Sylvester di b sarà

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ se } -1 < k < 1; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{se } k = \pm 1 \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{se } k < -1 \text{ o } k > 1.$$

(c) Ne segue che la segnatura di b non è mai $(1, 3)$.

(b) Sia λ uno degli autovalori e consideriamo il sistema

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & k & 0 \\ 1 & 1-\lambda & k & 0 \\ k & k & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = 0$$

ovvero

$$\begin{cases} (1-\lambda)x + y + kz = 0 \\ x + (1-\lambda)y + kz = 0 \\ kx + ky + (1-\lambda)z = 0 \\ (1-\lambda)w = 0 \end{cases}$$

che ha le seguenti soluzioni:

($\bullet$) $\lambda = 0$

$y = -x, z = w = 0$ se $k \neq \pm 1$ e $z = -kx - ky, w = 0$ se $k = \pm 1$ che danno luogo a

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0) \text{ se } k \neq \pm 1;$$

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -k, 0), v_4 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, k, 0) \text{ se } k = \pm 1$$

(in questo caso $\lambda_4 = 0,$ quindi occorre scegliere due autovettori ortonormali)

($\bullet$) $\lambda = 1$

$x = y = z = 0$ se $k \neq 0$ e $x = y = 0$ se $k = 0$ che danno luogo a

$$v_2 = (0, 0, 0, 1) \text{ se } k \neq 0;$$

$$v_2 = (0, 0, 0, 1), v_4 = (0, 0, 1, 0) \text{ se } k = 0$$

(in questo caso $\lambda_4 = 1,$ quindi occorre scegliere due autovettori ortonormali)

($\bullet$) $\lambda = \lambda_3$

$x = y = k, z = \lambda_3 - 2, w = 0$ se $k \neq 0$, $x = y, z = w = 0$ se $k = 0$ che danno luogo a

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{2k^2 + (\lambda_3 - 2)^2}}(k, k, \lambda_3 - 2, 0) \text{ se } k \neq 0; \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0) \text{ se } k = 0.$$

(•) $\lambda = \lambda_4$ (quindi consideriamo $k \neq 0, \pm 1$, altrimenti si rientra nei casi precedenti $\lambda_4 = 0, 1$)

$x = y = k, z = \lambda_4 - 2, w = 0$

$$v_4 = \frac{1}{\sqrt{2k^2 + (\lambda_4 - 2)^2}}(k, k, \lambda_4 - 2, 0).$$

Pertanto una base ortonormale di autovettori sarà $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ (definiti sopra) e quindi, osservando che il determinante dovrà essere 1,

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{k}{\sqrt{2k^2+(\lambda_3-2)^2}} & \frac{k}{\sqrt{2k^2+(\lambda_4-2)^2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{k}{\sqrt{2k^2+(\lambda_3-2)^2}} & \frac{k}{\sqrt{2k^2+(\lambda_4-2)^2}} \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_3-2}{\sqrt{2k^2+(\lambda_3-2)^2}} & \frac{\lambda_4-2}{\sqrt{2k^2+(\lambda_4-2)^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ se } k < 0, k \neq -1$$

ovvero

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{k}{\sqrt{2k^2+(\lambda_3-2)^2}} & \frac{k}{\sqrt{2k^2+(\lambda_4-2)^2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{k}{\sqrt{2k^2+(\lambda_3-2)^2}} & \frac{k}{\sqrt{2k^2+(\lambda_4-2)^2}} \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_3-2}{\sqrt{2k^2+(\lambda_3-2)^2}} & \frac{\lambda_4-2}{\sqrt{2k^2+(\lambda_4-2)^2}} \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ se } k > 0, k \neq 1$$

ovvero

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ se } k = 0$$

e

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\pm 1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{\pm 1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{\pm 1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\pm 1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ se } k = \pm 1$$

(d) Sia $k = 0$ e $W = \langle e_4, e_3, v_3 \rangle$ e sia $v_1 = e_4$ e $v_2 = e_3$. Si ha

$$\langle v_1, v_2 \rangle = b(e_4, e_3) = 0, \langle v_1, v_1 \rangle = b(e_4, e_4) = \langle v_2, v_2 \rangle = b(e_3, e_3) = 1$$

e quindi, come è noto,

$$\|v_1 \wedge v_2\| = \sqrt{\|v_1\|^2 \|v_2\|^2 - \langle v_1, v_2 \rangle^2} = 1. \blacksquare$$

2. Sia $k \in \mathbb{R}$. Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}^3$ consideriamo le rette r ed s_k di equazioni

$$r : \begin{cases} X = t \\ Y = t + 2 \\ Z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \quad s_k : \begin{cases} X + Y + Z = 1 \\ X - Z = k \end{cases}.$$

(a) Determinare la distanza di r da s_k.

(b) Determinare (se esitono) le equazioni di tutti i piani in $\mathbb{E}^3$ che formano un angolo di $\frac{\pi}{4}$ sia con r che con s_k.

(c) Considerato $\mathbb{E}^3 \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$, siano $\overline{r}$ e $\overline{s_k}$ le chiusure proiettive di r e di s_k. Determinare (se esitono) le equazioni di tutti i piani di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ che contengono sia $\overline{r}$ che $\overline{s_k}$.

SOLUZIONE:

(a) Osserviamo che i vettori di direzione delle due rette sono

$$v_r = (1, 1, 1), \quad v_{s_k} = (-1, 2, -1)$$

in particolare notiamo che r ed s_k non sono parallele. Due punti sulle rette sono $P = P(0, 2, 0) \in r, Q = Q(k, 1-k, 0) \in s_k$. Per la formula della distanza tra due rette si ha

$$d(r, s_k) = \frac{\left| \begin{vmatrix} -k & 1+k & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}}.$$

(b) Sia p il piano di equazione $AX + BY + CZ + D = 0$ e assumiamo, senza perdita di generalità, $A^2 + B^2 + C^2 = 1$. Si ha

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{A+B+C}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{-A+2B-C}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

e si trova $B = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{6}}, C = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}} - A$ da cui si ottiene, sostituendo in $A^2 + B^2 + C^2 = 1$,

$$12\sqrt{3}A^2 + 12(1 - \sqrt{2})A + (3 - 2\sqrt{2})\sqrt{3} = 0$$

che da la soluzione

$$A = C = \frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{3}}, B = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{6}}.$$

Se ne deduce che di tutti i piani in $\mathbb{E}^3$ che formano un angolo di $\frac{\pi}{4}$ sia con r che con s_k sono quelli di equazione (per ogni $D \in \mathbb{R}$)

$$\frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{3}}X + \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{6}}Y + \frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{3}}Z + D = 0.$$

(c) Un piano in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ che contenga sia $\overline{r}$ che $\overline{s_k}$ è la chiusura proiettiva di un piano in $\mathbb{E}^3$ che contiene sia r che s_k. Ma

$$r \cap s_k : \begin{cases} 3t+2=1 \\ 0=k \end{cases}$$

da cui $r \cap s_k = \emptyset$ se $k \neq 0$ e pertanto r ed s_k sono sghembe, quindi non esiste un piano che le contiene. Invece se $k=0$ allora il piano $X-Z=0$ di $\mathbb{E}^3$ è, essendo le rette distinte e incidenti, l'unico piano che contiene entrambe e quindi il piano $X_1 - X_3 = 0$ è l'unico piano in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ che contiene sia $\overline{r}$ che $\overline{s_0}$. ■

3. Siano $k, h \in \mathbb{R}$ e siano $\mathcal{C}_k$, la conica (affine o euclidea) di equazione

$$(1-k)X^2 + (1+k)Y^2 + 2\sqrt{|1-k^2|}XY + 2(1-k)X = 1$$

e $\mathcal{D}_h$ la conica (affine o euclidea) di equazione

$$hX^2 + (h-1)Y^2 = 1.$$

(a) Determinare per quali k, h si ha che $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono ellissi o parabole.
(b) Per $-1 \leq k \leq 1$, determinare un'isometria che trasforma $\mathcal{C}_k$ nella sua equazione canonica euclidea.
(c) Per $-1 \leq k \leq 1$, determinare i valori k e di h per cui $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono affinemente equivalenti (nel caso affine) o congruenti (nel caso euclideo).

SOLUZIONE:

(a) La matrice A_0 di $\mathcal{C}_k$ è

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1-k & \sqrt{|1-k^2|} \\ \sqrt{|1-k^2|} & 1+k \end{pmatrix}$$

e si ha $\det A_0 = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 \leq k \leq 1 \\ 2(1-k^2) & \text{se } k < -1 \text{ o } k > 1 \end{cases}$ quindi

$$\mathcal{C}_k \text{ è un'iperbole se e solo se } k < -1 \text{ o } k > 1, \text{ è una parabola se e solo se } -1 \leq k \leq 1.$$

(in particolare non è mai un'ellisse).
La matrice B_0 di $\mathcal{D}_h$ è

$$B_0 = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h-1 \end{pmatrix}$$

e si ha $\det B_0 = h^2 - h$, quindi

$$\mathcal{D}_h \text{ è un'iperbole se e solo se } 0 < h < 1, \text{ è un'ellisse se e solo se } h < 0 \text{ o } h > 1,$$

$$\text{è una parabola se e solo se } h = 0, 1.$$

(b) Osserviamo anticipatamente che, se $k = 1$, allora si trova che l'equazione canonica euclidea di $\mathcal{C}_1$ è

$$Y^2 - (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = 0$$

mentre se $k = -1$ si trova $2X^2 + 4X = 1$, da cui, con l'isometria

$$\begin{cases} X = X' - 1 \\ Y = Y' \end{cases}$$

si ottiene $X^2 - \frac{3}{2} = 0$ e quindi, scambiando X e Y, l'equazione canonica di $\mathcal{C}_{-1}$ è

$$Y^2 - (\sqrt{\frac{3}{2}})^2 = 0.$$

Assumiamo ora $-1 < k < 1$ e diagonalizziamo A_0. Si ha

$$P_{A_0}(T) = \begin{vmatrix} 1-k-T & \sqrt{1-k^2} \\ \sqrt{1-k^2} & 1+k-T \end{vmatrix} = T(T-2)$$

quindi gli autovalori di A_0 sono 0 e 2 e si vede subito che gli autovettori sono

$$(\sqrt{1-k^2}, k-1) \text{ e } (\sqrt{1-k^2}, k+1)$$

che normalizzati sono

$$\frac{1}{\sqrt{2-2k}}(\sqrt{1-k^2}, k-1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1+k}, -\sqrt{1-k})$$

e

$$\frac{1}{\sqrt{2+2k}}(\sqrt{1-k^2}, k+1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1-k}, \sqrt{1+k})$$

e quindi l'isometria da fare è

$$\begin{cases} X = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1+k}X' + \sqrt{1-k}Y' \\ Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sqrt{1-k}X' + \sqrt{1+k}Y' \end{cases}$$

dalla quale si ottiene (al solito rinominando X' e Y' come X e Y)

$$2Y^2 + \sqrt{2}(1-k)\sqrt{1+k}X + \sqrt{2}(1-k)\sqrt{1-k}Y = 1$$

e con l'isometria

$$\begin{cases} X = X' \\ Y = Y' - \frac{\sqrt{2}(1-k)\sqrt{1-k}}{4} \end{cases}$$

si trova

$$2Y^2 + \sqrt{2}(1-k)\sqrt{1+k}X - \big(1 + \frac{(1-k)^3}{4}\big) = 0$$

da cui, con l'isometria

$$\begin{cases} X = X' + \frac{1+\frac{(1-k)^3}{4}}{\sqrt{2}(1-k)\sqrt{1+k}} \\ Y = Y' \end{cases}$$

si trova, dividendo per 2,

$$Y^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}(1-k)\sqrt{1+k}X = 0$$

e con l'isometria

$$\begin{cases} X = -X' \\ Y = Y' \end{cases}$$

si ottiene l'equazione canonica di $\mathcal{C}_k$

$$Y^2 - 2\big(\frac{\sqrt{2}}{4}(1-k)\sqrt{1+k}\big)X = 0.$$

(c) Dato che $-1 \leq k \leq 1$ sappiamo che $\mathcal{C}_k$ è una parabola, quindi, affichè sia affinemente equivalente o congruente a $\mathcal{D}_h$, dovrà necessariamente essere anche $\mathcal{D}_h$ una parabola, e quindi $h = 0, 1$. Se $h = 0$ l'equazione canonica (affine o euclidea) di $\mathcal{D}_0$ è $Y^2 + 1^2 = 0$ mentre se $h = 1$ l'equazione canonica (affine o euclidea) di $\mathcal{D}_1$ è $Y^2 - 1^2 = 0$.
Ne deduciamo che $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ non sono mai congruenti, mentre sono affinemente equivalenti se e solo se $k = \pm 1, h = 1$. ∎