UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE210 - Geometria 2

a.a. 2019-2020

Prova scritta del 29-1-2020

TESTO

Svolgere tutti gli esercizi.

1. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 4 con base $\{e_1, \dots, e_4\}$. Sia $b : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica tale che

$$(*) \qquad b(e_i, e_i) = 1, 1 \le i \le 4, b(e_1, e_2) = 1, e_3 \perp (e_1 - e_2) \text{ e } \langle e_1, e_2, e_3 \rangle \subset e_4^{\perp}.$$

(a) Determinare tutte le possibili b che soddisfano $(*)$ e la loro forma canonica di Sylvester.

(b) Per ogni b che soddisfa $(*)$ determinare una matrice $M \in SO(4)$ che diagonalizza b.

(c) Determinare se esistono b che soddisfano $(*)$ ed hanno segnatura $(1, 3)$.

(d) Determinare almeno una b che soddisfa $(*)$ ed un sottospazio W di dimensione 3 su cui la restrizione di tale b definisce un prodotto scalare. In tal caso, scegliere due vettori non nulli $v_1, v_2 \in W$ e calcolare $\|v_1 \wedge v_2\|$.

2. Sia $k \in \mathbb{R}$. Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}^3$ consideriamo le rette r ed s_k di equazioni

$$r : \begin{cases} X = t \\ Y = t + 2 \\ Z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \quad s_k : \begin{cases} X + Y + Z = 1 \\ X - Z = k \end{cases}.$$

(a) Determinare la distanza di r da s_k.

(b) Determinare (se esitono) le equazioni di tutti i piani in $\mathbb{E}^3$ che formano un angolo di $\frac{\pi}{4}$ sia con r che con s_k.

(c) Considerato $\mathbb{E}^3 \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$, siano $\overline{r}$ e $\overline{s_k}$ le chiusure proiettive di r e di s_k. Determinare (se esitono) le equazioni di tutti i piani di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ che contengono sia $\overline{r}$ che $\overline{s_k}$.

3. Siano $k, h \in \mathbb{R}$ e siano $\mathcal{C}_k$, la conica (affine o euclidea) di equazione

$$(1-k)X^2 + (1+k)Y^2 + 2\sqrt{|1-k^2|}XY + 2(1-k)X = 1$$

e $\mathcal{D}_h$ la conica (affine o euclidea) di equazione

$$hX^2 + (h-1)Y^2 = 1.$$

(a) Determinare per quali k, h si ha che $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono ellissi o parabole.
(b) Per $-1 \leq k \leq 1$, determinare un'isometria che trasforma $\mathcal{C}_k$ nella sua equazione canonica euclidea.
(c) Per $-1 \leq k \leq 1$, determinare i valori k e di h per cui $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono affinemente equivalenti (nel caso affine) o congruenti (nel caso euclideo).