Geometria e algebra lineare 2

Esercizi su forme quadratiche

Esercizio 1. Si scriva la forma bilineare polare e la matrice associata alle seguenti forme quadratiche. Se ne determinino inoltre rango e segnatura.

(i) $q_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $q_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 - 3x_3^2$;

(ii) $q_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $q_2(x_1, x_2) = 9x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2$;

(iii) $q_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $q_3(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 4kx_1x_2 - 2x_2^2$ al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$;

(iv) $q_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $q_4(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + tx_2^2$ al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2. Si calcolino rango e segnatura delle forme quadratiche associate alle seguenti matrici simmetriche, trovando delle basi che le portino in forma canonica:

(i)
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

(ii)
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Determinare tutti i vettori isotropi della forma quadratica $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ associata alla matrice
$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^3$ si consideri la forma quadratica
$$q(x_1, x_2, x_3) = 3x_2^2 + 8x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 12x_2x_3.$$

(i) Dire se q è definita positiva, definita negativa o indefinita.

(ii) Dire se q ha la stessa forma canonica di Sylvester della forma quadratica reale
$$q_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2.$$

Esercizio 5. Si indichi con $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado al più 2 e si consideri l'applicazione $\rho : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}$ definita come $\rho(p) := p(-1)^2 + p(0)^2 - p(1)^2$.

(i) Mostrare che ρ è una forma quadratica su $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ e se ne determini la segnatura.

(ii) Si determini una base rispetto alla quale ρ assuma la forma canonica.

Esercizio 6. Data una matrice M, si indichi con $\Sigma(M)$ la somma di tutti i suoi elementi. Si considerino ora la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$
lo spazio vettoriale $\mathcal{A}$ di tutte le matrici reali antisimmetriche di ordine 3 e l'applicazione $\varphi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ definita da $\varphi(X, Y) := \Sigma(XAY)$.

(i) Verificare che φ è una forma bilineare simettrica.

(ii) Determinare il rango e la segnatura di φ.

(iii) Sia

$$U := \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Mostrare che $\mathcal{A} = U \oplus U^{\perp}$ e dire se $\varphi|_{U\times U}$ è definita positiva.

Esercizio 7. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e sia $\mathcal{S}$ lo spazio vettoriale delle matrici simmetriche reali di ordine 2. Si consideri l'applicazione $\varphi : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ definita da $\varphi(X, Y) = \text{Tr}(XAY)$.

(i) Verificare che φ è una forma bilineare simmetrica non degenere.

(ii) Determinare la segnatura di φ individuando una base rispetto alla quale φ assuma la forma canonica.

(iii) Determinare l'insieme dei vettori isotropi rispetto a φ e stabilire se esso è un sottospazio vettoriale.