Geometria e algebra lineare 2

Esercizi su dualità e proiettività

Esercizio 1. Scrivere la proposizione duale di ciascuna delle seguenti proposizioni:

(a) In $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$, dati un piano π e una retta r che non si intersecano, comunque si prenda una retta s contenuta in π, esiste un solo iperpiano che contiene r e s.

(b) Tre rette distinte r, s, t in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$, che non giacciono in uno stesso piano ma sono a due a due complanari, hanno sempre un punto in comune.

(c) In $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, date due rette sghembe r e r' ed un punto P al di fuori di esse, esiste un'unica retta s contenente il punto ed incidente entrambe le rette date.

Esercizio 2. Dimostrare le proposizioni dell'Esercizio 1 o le loro duali.

Determinare inoltre le equazioni cartesiane della retta s nella proposizione (c), nel caso in cui $P = [0:1:0:1]$ e le equazioni cartesiane di r e r' siano

$$r : x_0 - x_2 + 2x_3 = 2x_0 + x_1 = 0, \quad r' : 2x_1 - 3x_2 + x_3 = x_0 + x_3 = 0.$$

Esercizio 3. Si considerino in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ i punti

$$P_1 = [1:0:0], \; P_2 = [0:-1:1], \; P_3 = [0:0:-1], \; P_4 = [1:-1:2],$$

$$Q_1 = [3:1:-1], \; Q_2 = [-1:-3:3], \; Q_3 = [-1:1:3], \; P_4 = [1:-1:5].$$

(i) Si costruisca, se esiste, una proiettività $f \in PGL(3, \mathbb{R})$ tale che $f(P_i) = Q_i$ per $1 \leq i \leq 4$ e si dica se è unica.

(ii) Si verifichi che f ha un punto fisso P e una retta di punti fissi r tale che $P \notin r$.

Esercizio 4. In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ si considerino le rette $r_0 = V_{\mathbb{P}}(x_0)$, $r_1 = V_{\mathbb{P}}(x_1)$, $r_2 = V_{\mathbb{P}}(x_2)$, $s_0 = V_{\mathbb{P}}(x_0 + x_1)$, $s_1 = V_{\mathbb{P}}(x_1 + x_2)$, $s_2 = V_{\mathbb{P}}(x_0 + x_2)$.

(i) Dire se esiste una proiettività $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che $f(r_0) = s_0$, $f(r_1) = s_1$, $f(r_2) = s_2$ e, in caso affermativo, se f è unica.

(ii) Dire se esiste una proiettività f che soddisfi le ipotesi del punto (i) e tale che

$$f([1:1:1]) = [4:0:-2].$$

In caso affermativo, scrivere esplicitamente una tale f e dire se f è unica.